

MATHS



CHAPITRE 2



1 Nombre rationnel et propriétés

A Nombre rationnel

Définition

Tout nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction est appelé un **nombre rationnel**.

Exemple :

$\frac{-4}{9}$ est un nombre rationnel. 3,8 est aussi un nombre rationnel car $3,8 = \frac{38}{10}$.

Remarque : Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction. Par exemple, il est impossible d'écrire le nombre π sous la forme d'une fraction. On dit que π est un nombre irrationnel.

B Égalité de fractions

Propriété

La valeur d'une fraction ne change pas si on multiplie ou on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Si a , b et k sont trois nombres tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$, alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}.$$

Exemples :

1. On a $\frac{4}{3} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{20}{15}$.

2. Dans l'autre sens, on peut aussi écrire $\frac{21}{49} = \frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{3}{7}$.

3. On peut aussi utiliser les divisions et écrire $\frac{48}{56} = \frac{48 \div 8}{56 \div 8} = \frac{6}{7}$.

Remarque : Cette propriété est utilisée pour, entre autres choses :

- simplifier une fraction ;
- réduire des fractions au même dénominateur.

Propriété : égalité des produits en croix

Soit a , b , c et d quatre nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$.
- Réciproquement, si $a \times d = b \times c$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Remarque : Cette égalité est également utilisée dans le chapitre 10 sur la proportionnalité.

Exemple :

Les fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{16}{40}$ sont égales car $2 \times 40 = 80$ et $5 \times 16 = 80$.



2 Addition et soustraction de nombres rationnels

Propriété

Pour additionner ou soustraire deux nombres rationnels :

- si ce n'est pas déjà le cas, on réduit ces deux nombres au même dénominateur ;
- on additionne ou on soustrait leur numérateur en gardant le dénominateur commun ;
- on simplifie, si possible, le résultat obtenu.

Exemples :

$$1. A = \frac{2}{5} + \frac{-3}{5} = \frac{2 + (-3)}{5} = \frac{-1}{5}$$

$$2. B = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$3. C = \frac{4}{7} - \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} - \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{12}{21} - \frac{14}{21} = \frac{12-14}{21} = \frac{-2}{21}$$

$$4. D = \frac{1}{4} + \frac{7}{6} = \frac{1 \times 6}{4 \times 6} + \frac{7 \times 4}{6 \times 4} = \frac{6}{24} + \frac{28}{24} = \frac{6+28}{24} = \frac{34}{24} = \frac{34 \div 2}{24 \div 2} = \frac{17}{12}$$

3 Simplification d'une fraction avec les nombres premiers

Définition

Un nombre entier positif est dit **premier** s'il possède **exactement** deux diviseurs entiers positifs distincts : 1 et lui-même.

Exemple :

Les nombres premiers compris entre 1 et 100 sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97 (voir activité 2 page 39).

Remarque : 1 et 0 ne sont pas des nombres premiers car 1 n'a qu'un seul diviseur (lui-même) et 0 a une infinité de diviseurs.

Propriété

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en un unique **produit de facteurs premiers** (à l'ordre près des facteurs). Cette décomposition permet notamment de simplifier des fractions au maximum.

Exemples :

1. La décomposition de 99 en produit de facteurs premiers est $99 = 3 \times 3 \times 11$.

$$2. \frac{99}{66} = \frac{\cancel{3} \times 3 \times \cancel{11}}{2 \times \cancel{3} \times \cancel{11}} = \frac{3}{2}$$