MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

Proportionnalité

Cours

1 Reconnaitre une situation de proportionnalité

Définition

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple 1

Anna achète pour 1,50 € de bonbons à la boulangerie.
Chaque bonbon coute 0,15 €.

prix à payer =
nombre de bonbons achetés $\times$ ***0,15***

Le prix à payer est proportionnel au nombre de bonbons achetés, avec **0,15** pour coefficient de proportionnalité.
Avec 1,50 €, Anna peut acheter 10 bonbons :

$1{,}50 = 10 \times \mathbf{0{,}15}$.

Exemple 2

À la boulangerie, Isham lit :

Prix d'une baguette : 0,85 €
Pour 3 baguettes achetées,
la 4^{e} est offerte.

Le prix de 3 baguettes est le même que le prix de 4 baguettes.
Le prix à payer n'est pas proportionnel au nombre de baguettes achetées.

Définition

Dans un tableau représentant deux grandeurs, si les valeurs de la première grandeur sont proportionnelles aux valeurs de la seconde, ce tableau est appelé **tableau de proportionnalité**.

Méthode

Pour déterminer si deux grandeurs représentées dans un tableau sont proportionnelles, on peut calculer les quotients des valeurs correspondantes de ces grandeurs.

Exemple 1

On a relevé dans le tableau ci-dessous la consommation, en fonction du temps, d'un robinet mal fermé.

Temps écoulé (en jours)	1	7	365
Quantité d'eau (en L)	0,432	3,024	157,68

$\times$ **0,432**

On calcule les quotients : $\frac{0{,}432}{1} = \mathbf{0{,}432}$; $\frac{3{,}024}{7} = \mathbf{0{,}432}$; $\frac{157{,}68}{365} = \mathbf{0{,}432}$

Tous les quotients sont égaux à 0,432 : le tableau est donc un tableau de proportionnalité.
La quantité d'eau est proportionnelle au temps écoulé, avec **0,432** pour coefficient de proportionnalité.

Exemple 2

Angèle et Clara achètent respectivement un pack de 6 litres de jus d'orange à 9,12 € et un pack de 4 litres à 6,48 €. On récapitule ces résultats dans un tableau ci-contre.

Quantité de jus (en L)	6	4
Prix à payer (en €)	9,12	6,48

On calcule les quotients : $\frac{9{,}12}{6} = 1{,}52$; $\frac{6{,}48}{4} = 1{,}62$

Les quotients ne sont pas égaux, ce tableau n'est donc pas un tableau de proportionnalité.
Le prix à payer n'est pas proportionnel à la quantité de jus d'orange achetée ; il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

Cours

2 Calculer une quatrième proportionnelle

Propriété

Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, lorsque l'on ne connait que trois valeurs, on peut calculer la quatrième valeur, appelée **quatrième proportionnelle**.

Méthode 1

À l'aide du coefficient de proportionnalité

Pour compléter un tableau de proportionnalité, on peut utiliser un coefficient de proportionnalité pour passer d'une ligne à l'autre.

Exemple

Marie voudrait mettre 5,5 L d'essence dans son scooter. La station-service affiche un prix de l'essence à 1,22 € le litre. Combien devrait-elle payer ?
Marie n'a que 5 €. Quelle quantité d'essence peut-elle acheter ?

On représente cette situation par un tableau de proportionnalité :

Quantité d'essence achetée (en L)	1	5,5	?
Prix à payer (en €)	1,22	?	5

÷ 1,22 × 1,22

Le prix à payer est proportionnel à la quantité d'essence achetée avec pour coefficient de proportionnalité 1,22. Marie devrait donc payer 5,5 × 1,22 € soit 6,71 €.
Avec 5 €, Marie peut acheter 5 L ÷ 1,22 soit environ 4,1 L.

Méthode 2

Liens entre les colonnes

Pour obtenir les nombres d'une colonne dans un tableau de proportionnalité, on peut :
– **multiplier ou diviser** les nombres d'une autre colonne par un même nombre ;
– **ajouter ou soustraire** les nombres de deux autres colonnes.

Exemple

Une recette de pâte à crêpes indique qu'il faut 300 g de farine pour cuisiner 12 crêpes. Quelle masse de farine faut-il pour cuisiner 4 crêpes ? 16 crêpes ?

La masse de farine à utiliser est proportionnelle au nombre de crêpes à cuisiner, on peut donc faire un tableau de proportionnalité.

÷ 3

Nombre de crêpes	12	4	16
Masse de farine (en g)	300	?	?

Pour faire 4 crêpes, il faut utiliser :
300 g ÷ 3 soit 100 g de farine

Pour faire 16 crêpes, il faut utiliser :
300 g + 100 g soit 400 g de farine

Méthode 3

Passage par l'unité

Pour traiter une situation de proportionnalité, il est parfois plus judicieux de revenir à l'unité.

Exemple

Lucile a acheté 3 cahiers pour 4,05 €.
Emma a besoin de 7 cahiers. Combien devra-t-elle payer ?

Nombre de cahiers	3	7
Prix (en €)	4,05	?

3 cahiers coutent 4,05 €, donc 1 cahier coute $\frac{4{,}05\,€}{3} = 1{,}35$ €.
Donc 7 cahiers coutent 7 × 1,35 € = 9,45 €.

Cours

3 Utiliser un pourcentage ou une échelle

Propriété

p désigne un nombre positif.
Calculer p % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\frac{p}{100}$.

Exemple

Dans un pot de crème fraiche de 20 cL, il y a 12 % de matière grasse.

$12\ \%$ de $20 = \frac{12}{100} \times 20 = 2{,}4$. La quantité de matière grasse dans le pot est égale à 2,4 g.

Remarque

Un pourcentage exprime une proportion par rapport à 100. Il peut s'écrire sous plusieurs formes :

15 %	=	$\frac{15}{100}$	=	0,15
pourcentage		**écriture fractionnaire**		**écriture décimale**

Méthode

Pour **calculer un pourcentage**, on peut exprimer une proportion de dénominateur 100 ou utiliser un tableau de proportionnalité.

Exemples

- **À l'aide d'une proportion de dénominateur 100**

4 personnes sur 5 trient leurs déchets. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On peut exprimer $\frac{4}{5}$ comme une proportion de dénominateur 100 : $\frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\ \%$.

80 % des personnes trient leurs déchets.

- **À l'aide d'un tableau de proportionnalité**

Dans une classe de 23 élèves de 3^e^, 15 élèves connaissent leur orientation scolaire pour l'année suivante. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On peut représenter cette situation par un tableau de proportionnalité :

Nombre d'élèves connaissant leur orientation	15	?
Nombre d'élèves dans la classe	23	100

$\div \frac{23}{15}$; $\times \frac{23}{15}$

$\boxed{?} = 100 \div \frac{23}{15} \approx 65{,}2$. La proportion d'élèves connaissant leur orientation est d'environ 65,2 %.

Définition

On dit qu'un plan est **à l'échelle** si les distances sur le plan sont proportionnelles aux distances réelles.
Le coefficient de proportionnalité égal au rapport $\frac{\text{distances sur le plan}}{\text{distances réelles}}$, où les deux distances sont exprimées dans la même unité, est appelé **échelle** du plan.

Remarque

Dire qu'un plan est à l'échelle $\frac{1}{1\,000}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 1 000 cm en réalité.

Exemple

La distance à vol d'oiseau entre Bordeaux et Pau sur une carte à l'échelle $\frac{1}{250\,000}$ est de 86 cm.

Distances sur le plan (en cm)	1	86
Distances réelles (en cm)	250 000	?

$\times 86$

$\boxed{?} = 250\,000 \times 86 = 21\,500\,000$.

La distance entre Bordeaux et Pau est donc de 21 500 000 cm, soit 215 km.

Cours

4 Partager une quantité selon un ratio

Définition

a, b, i et j désignent des nombres positifs.

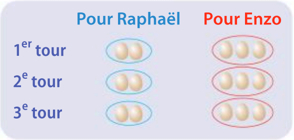
On dit que les deux nombres a **et** b **sont dans le ratio** $i : j$ si $\dfrac{a}{i} = \dfrac{b}{j}$.

Exemples

- Deux nombres a et b sont dans le ratio $2 : 3$ si $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3}$.

Le ratio 2 : 3 peut se lire « 2 pour 3 ».

- Partager des œufs de Pâques selon le ratio 2 : 3 entre Raphaël et Enzo signifie qu'à chaque fois qu'on donne 2 œufs à Raphaël, on en donne 3 à Enzo.
Le nombre d'œufs de Raphaël et le nombre d'œufs de Enzo sont alors dans le ratio 2 : 3.



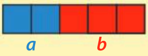
Propriétés

a et b désignent des nombres positifs. Si a et b sont dans le ratio $2 : 3$, alors :

- le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité ;

a	b
2	3

- a est égal à $\dfrac{2}{5}$ du nombre $a + b$; b est égal à $\dfrac{3}{5}$ du nombre $a + b$.



Remarque

Cette propriété reste vraie si l'on remplace 2 et 3 par d'autres nombres positifs.

Exemple

On partage 30 œufs de Pâques selon le ratio 2 : 3 entre Raphaël et Enzo.

- Raphaël obtiendra $\dfrac{2}{5}$ des œufs, soit $\dfrac{2}{5} \times 30 = 12$ œufs.
- Enzo obtiendra $\dfrac{3}{5}$ des œufs, soit $\dfrac{3}{5} \times 30 = 18$ œufs.

Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

12	18
2	3

Définition

a, b, c, i, j, k désignent des nombres positifs. On dit que a, b et c sont dans le ratio $i : j : k$ si $\dfrac{a}{i} = \dfrac{b}{j} = \dfrac{c}{k}$.

Exemples

- Trois nombres a, b et c sont dans le ratio $2 : 3 : 5$ si $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{5}$.

- Dans la recette d'un gâteau pour 4 personnes, il faut 200 g de sucre, 300 g de farine et 500 g de lait. Les masses de sucre, de farine et de lait sont dans le ratio 2 : 3 : 5 puisque $\dfrac{200}{2} = \dfrac{300}{3} = \dfrac{500}{5} = 100$.

Propriétés

a, b, c désignent des nombres positifs.
Si a, b et c sont dans le ratio $2 : 3 : 5$, alors :

- le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

a	b	c
2	3	5

- a est égal à $\dfrac{2}{10}$ du nombre $a + b + c$ (b et c sont respectivement égaux à $\dfrac{3}{10}$ et $\dfrac{5}{10}$ de ce nombre).