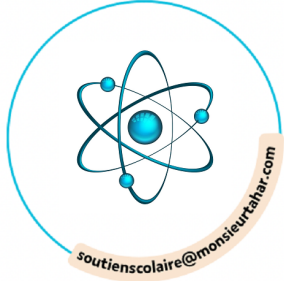


MATHS



CHAPITRE 12



Triangles et parallélogrammes



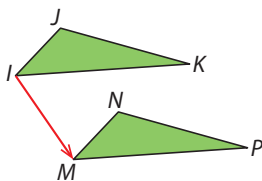
1

Découvrir les triangles égaux

► Deux **triangles** sont **égaux** lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

1 IJK est un triangle et MNP son image par la translation de vecteur $\vec{IM}$.

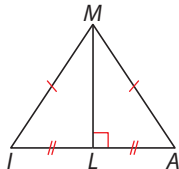
Justifier que les triangles IJK et MNP sont égaux.



La translation conserve les longueurs, donc $IJ = MN$, $JK = NP$ et $IK = MP$.

Les triangles IJK et MNP ont leurs côtés deux à deux de même longueur donc ce sont des triangles égaux.

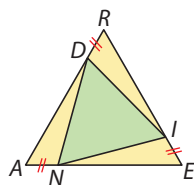
2 Dans la figure ci-contre, I, L et A sont trois points alignés. Justifier que MLI et MLA sont deux triangles égaux.



Les triangles MLI et MLA ont un côté en commun : $[ML]$. D'après le codage $MI = MA$ et $IL = LA$.

Les triangles MLI et MLA ont leurs côtés deux à deux de même longueur donc ce sont des triangles égaux.

3 **MODE EXPERT** Dans la figure ci-contre, ARE et DIN sont des triangles équilatéraux. D, N et I sont des points appartenant respectivement aux segments $[AR]$, $[AE]$ et $[RE]$ tels que $DR = IE = AN$.



Prouver que les triangles DRI , INE et ADN sont égaux.

Le triangle ARE est équilatéral donc $AR = RE = AE$.

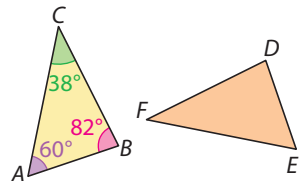
Le triangle DIN est équilatéral donc $DI = IN = DN$.

$RD = IE = AN$, donc $AD = RI = NE$. Ainsi, les triangles

DRI , INE et ADN ont leurs côtés deux à deux de même longueur, donc ce sont des triangles égaux.

► Si deux triangles sont égaux, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

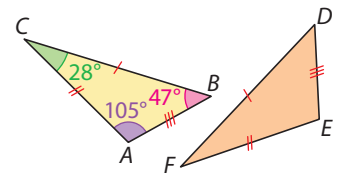
4 Sachant que les triangles ABC et DEF sont égaux, déterminer les mesures des angles du triangle DEF .



Les triangles ABC et DEF sont égaux, donc leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Ainsi $\widehat{D} = 82^\circ$, $\widehat{F} = 38^\circ$ et $\widehat{E} = 60^\circ$.

5 Déterminer les mesures des angles du triangle DEF .

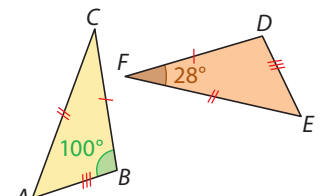


$BC = DF$, $AB = DE$

et $AC = FE$, donc les triangles ABC et DEF sont égaux.

Donc $\widehat{D} = \widehat{B} = 47^\circ$, $\widehat{F} = \widehat{C} = 28^\circ$ et $\widehat{E} = \widehat{A} = 105^\circ$.

6 Déterminer les mesures des angles des triangles ABC et DEF .



$BC = DF$, $AB = DE$

et $AC = FE$, donc les triangles ABC et DEF sont égaux.

Donc $\widehat{D} = \widehat{B} = 100^\circ$, $\widehat{F} = \widehat{C} = 28^\circ$ et $\widehat{E} = \widehat{A}$.

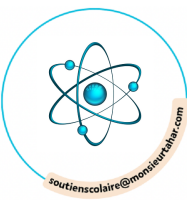
De plus, dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° ,

donc $\widehat{E} = \widehat{A} = 180^\circ - (100^\circ + 28^\circ) = 52^\circ$.



2

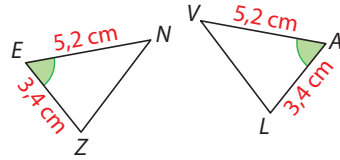
Reconnaitre des triangles égaux



► Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ils sont égaux.

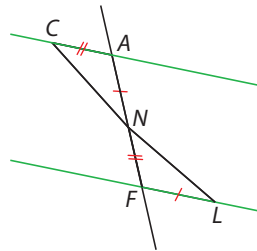
► Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont égaux.

7 Démontrer que les triangles ZEN et VAL sont égaux.



Dans les triangles ZEN et VAL , on constate que $\widehat{ZEN} = \widehat{VAL}$, $EZ = AL$ et $EN = VA$. Les triangles ZEN et VAL ont donc un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur. Ils sont donc égaux.

8 **MODE EXPERT** Sur la figure ci-contre, les droites (CA) et (FL) sont parallèles et les droites (CL) et (AF) se coupent en N .

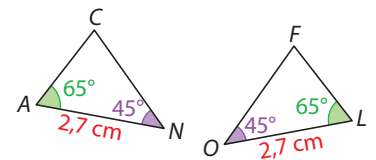


1. Démontrer que $\widehat{CAN} = \widehat{NFL}$.
Les angles $\widehat{CAN}$ et $\widehat{NFL}$ sont alternes-internes, et les droites (CA) et (FL) parallèles. Donc $\widehat{CAN} = \widehat{NFL}$.

2. En déduire que les triangles CAN et NFL sont égaux.
Dans les triangles CAN et NFL , $\widehat{CAN} = \widehat{NFL}$, $CA = NF$ et $AN = FL$.
L'angle de même mesure est compris entre les deux côtés de même longueur.
Donc les triangles CAN et NFL sont égaux.

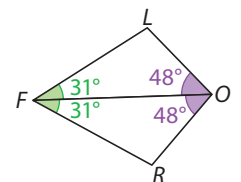
3. Que peut-on dire des longueurs CN et NL ?
Comme les triangles CAN et NFL sont égaux, les longueurs CN et NL sont égales.

9 Démontrer que les triangles CAN et FOL sont égaux.



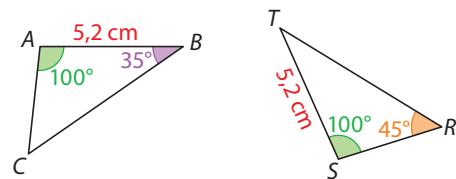
$AN = OL$, $\widehat{CAN} = \widehat{FLO}$ et $\widehat{CNA} = \widehat{FOL}$. Les triangles CAN et FLO ont donc un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure. Ils sont donc égaux.

10 Démontrer que les triangles FLO et FOR sont égaux.



Les triangles FLO et FOR ont un côté commun, $[FO]$, compris entre deux angles de mesures respectives 31° et 48° . Donc FLO et FOR sont des triangles égaux.

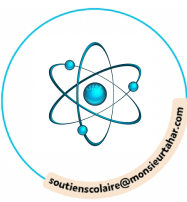
11 **MODE EXPERT** Démontrer que les triangles ABC et RST sont égaux.



Dans le triangle RST , la somme des mesures des angles est égale à 180° .
Donc $\widehat{T} = 180^\circ - (100^\circ + 45^\circ) = 35^\circ$.
Dans les triangles ABC et RST , $AB = TS$, $\widehat{A} = \widehat{S}$ et $\widehat{B} = \widehat{T}$.
Le côté de même longueur est bien compris entre deux angles de même mesure.
Donc ABC et RST sont des triangles égaux.

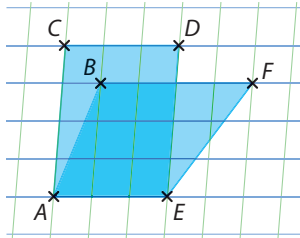


3 Connaître les parallélogrammes



► Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

12 Les droites bleues sont parallèles entre elles et les droites vertes sont parallèles entre elles.



1. Tracer les quadrilatères ACDE et ABFE.

2. ACDE est-il un parallélogramme ? Justifier.

(AC) et (DE) sont parallèles ; (CD) et (AE)

sont parallèles.

Donc ACDE est un parallélogramme.

3. ABFE est-il un parallélogramme ? Justifier.

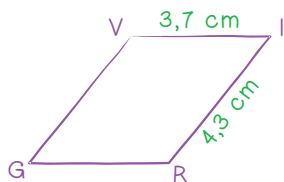
(AB) et (EF) ne sont pas parallèles.

Donc ABFE n'est pas un parallélogramme.

► Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :

- ses diagonales se coupent en leur milieu ;
- ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur ;
- ses angles opposés sont deux à deux de même mesure.

13 VIRG est un parallélogramme tel que $VI = 3,7 \text{ cm}$ et $IR = 4,3 \text{ cm}$. Énoncer la propriété qui permet de connaître les longueurs GR et VG.



Si un quadrilatère est un parallélogramme

alors ses côtés opposés sont deux à deux

de même longueur.

14 CALE est un parallélogramme tel que $\widehat{ECA} = 125^\circ$. Combien mesure l'angle $\widehat{ALE}$? Justifier.

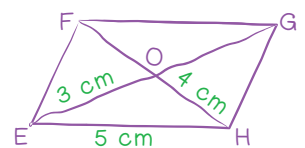
CALE est un parallélogramme donc ses angles

opposés sont deux à deux de même mesure.

$\widehat{ALE}$ est opposé à $\widehat{ECA}$ et $\widehat{ECA}$ mesure 125° ,

donc $\widehat{ALE}$ mesure 125° .

15 Le parallélogramme EFGH ci-contre a été dessiné à main levée.



1. Donner les longueurs de [FG], [EG] et [FH]. Justifier les réponses.

EFGH est un parallélogramme donc ses côtés opposés

ont deux à deux la même longueur,

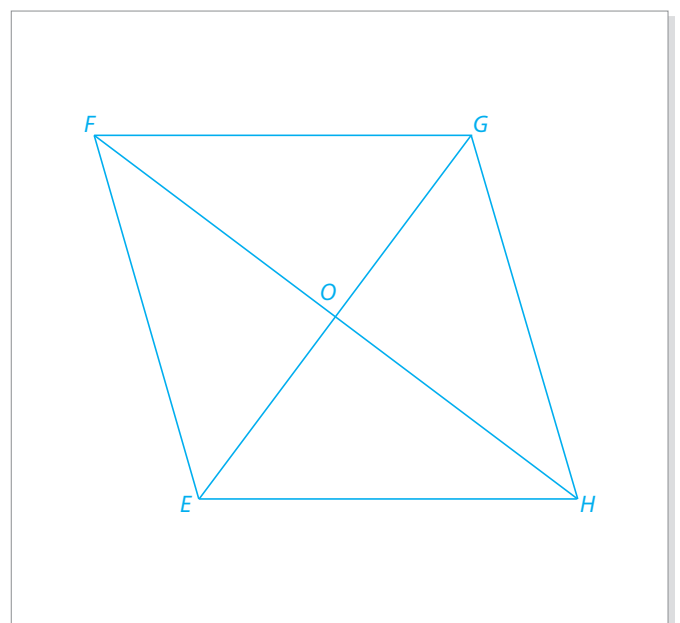
donc $FG = EH = 5 \text{ cm}$.

EFGH est un parallélogramme, donc ses diagonales

se coupent en leur milieu qui est le point O.

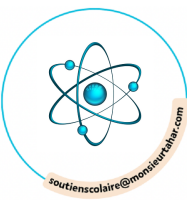
Donc $FH = 2 \times OH = 8 \text{ cm}$ et $EG = 2 \times EO = 6 \text{ cm}$.

2. Construire alors la figure en vraie grandeur.





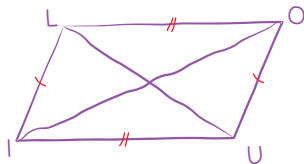
Reconnaitre un parallélogramme



- ▶ Si un quadrilatère a des diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
- ▶ Si un quadrilatère non croisé a des côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
- ▶ Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

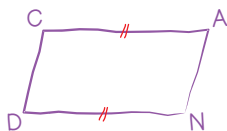
16 Peut-on affirmer que chacun des quadrilatères dessinés à main levée ci-dessous sont des parallélogrammes ? Justifier.

a.



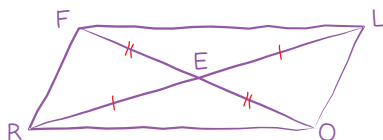
$LO = IU$ et $LI = OU$, donc le quadrilatère $LOUI$ a ses côtés opposés deux à deux de même longueur.
Donc $LOUI$ est un parallélogramme.

b.



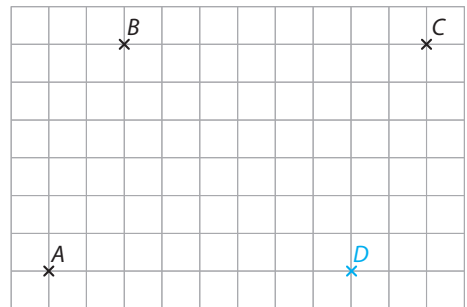
On ne peut savoir si $CAND$ est ou non un parallélogramme car on ne sait pas si $[CD]$ et $[AM]$ ont la même longueur.

c.



$FLOR$ est un quadrilatère dont les diagonales $[FO]$ et $[RL]$ se coupent en leur milieu E .
Donc $FLOR$ est un parallélogramme.

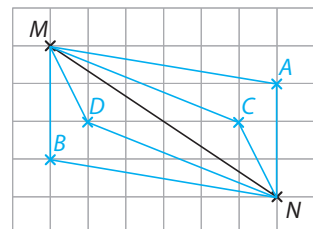
17 1. Compléter la figure ci-dessous en plaçant le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.



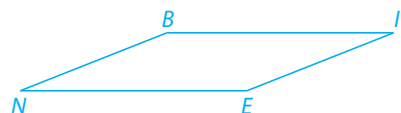
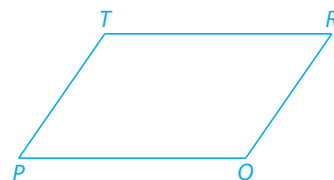
2. Justifier qu'ainsi construit, $ABCD$ est bien un parallélogramme.

Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles et ont même longueur, donc $ABCD$ est bien un parallélogramme.

18 Construire deux parallélogrammes $MANB$ et $MCND$ non superposables.



19 Construire deux parallélogrammes non superposables $TROP$ et $BIEN$ tels que $TR = BI = 3$ cm et $TP = BN = 2$ cm.





5

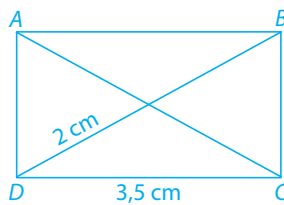
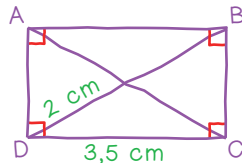
Connaître les parallélogrammes particuliers



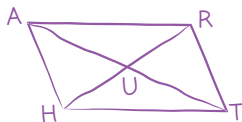
- Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits.
- Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur.
- Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

20 Après avoir justifié la nature du quadrilatère, en faire une construction en vraie grandeur.

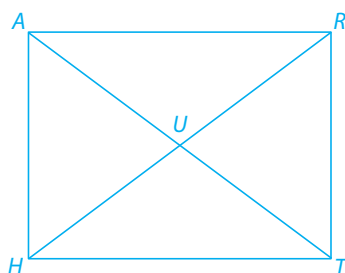
$ABCD$ est un quadrilatère avec quatre angles droits, donc c'est un rectangle.



21 Sur la figure à main levée ci-contre, $ARTH$ est un parallélogramme tel que $AR = 4$ cm et $AU = UR = 2,5$ cm.



1. Construire la figure en vraie grandeur.



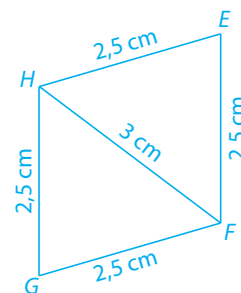
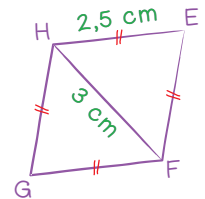
2. Le parallélogramme $ARTH$ est-il particulier ? Justifier.

$AU = UR$, donc $ARTH$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. $ARTH$ est donc un rectangle.

- Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.
- Si un quadrilatère est un losange, alors c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

22 Après avoir justifié la nature du quadrilatère, en faire une construction en vraie grandeur.

$EFGH$ est un losange car il a quatre côtés de même longueur.

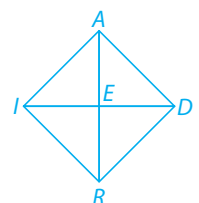


- Un **carré** est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur.
- Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et ont la même longueur.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.

23 En justifiant la construction, tracer un carré $ADRI$ de centre E tel que $ER = 1$ cm.

$ADRI$ est un carré, donc c'est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en leur milieu et qui sont perpendiculaires.

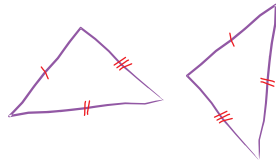
Donc $EA = ED = EI = ER = 1$ cm et (AR) et (DI) sont perpendiculaires.



24 Parcours ceinture jaune

1. Deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure sont-ils forcément égaux ? **Non**...

2. Les triangles dessinés à main levée sont-ils égaux ? **Oui**...



3. Un carré est-il un losange particulier ? **Oui**...

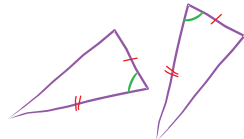
4. $ABCD$ est un losange. Les triangles ABD et DBC sont-ils égaux ? **Oui**...

5. Un losange a pour côté 5 cm. Quel est son périmètre ? **20 cm**...

25 Parcours ceinture verte

1. Deux triangles qui ont, deux à deux, un angle de même mesure et deux côtés de même longueur sont-ils forcément égaux ? **Non**...

2. Les triangles dessinés à main levée sont-ils égaux ? **Oui**...



3. Un carré est-il un rectangle particulier ? **Oui**...

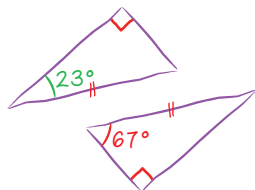
4. $ABCD$ est un rectangle. Les triangles ABC et ABD sont-ils égaux ? **Oui**...

5. Un losange a un périmètre de 16,4 cm. Quelle est la longueur de son côté ? **4,1 cm**...

26 Parcours ceinture noire

1. Deux triangles qui ont, deux à deux, un côté de même longueur et deux angles de même mesure sont-ils forcément égaux ? **Non**...

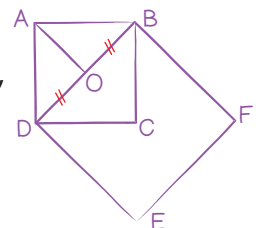
2. Les triangles dessinés à main levée sont-ils égaux ? **Oui**...



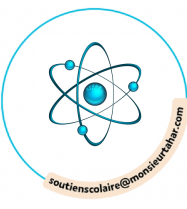
3. $ABCD$ est un rectangle de centre O . AOB et BOC sont-ils égaux ? **Non**...

4. Un rectangle a pour périmètre 18,2 cm. Sachant que sa longueur mesure 61 mm, déterminer sa largeur. **3 cm**...

5. $ABCD$ et $BDEF$ sont des carrés. Sachant que $AO = 2,8$ cm, déterminer le périmètre de $BDEF$. **22,4 cm**...



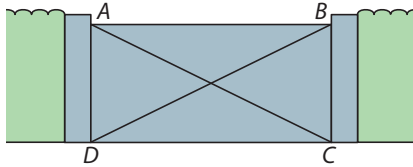
Problèmes



27 Dans un portail

Modéliser, Raisonner

Dans le portail à forme rectangulaire représenté ci-dessous, démontrer que les triangles ABC et ABD sont égaux.

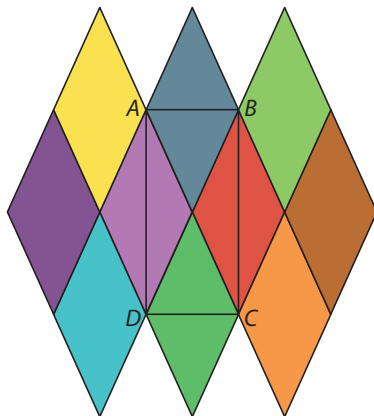


$ABCD$ est un rectangle donc $AD = BC$.
De plus, ses diagonales sont de même longueur, donc $AC = BD$.
Les triangles ABC et ADC ont le côté $[AB]$ en commun.
De plus, $AD = BC$ et $AC = BD$.
Ces deux triangles ont leurs côtés deux à deux de même mesure, donc ils sont égaux.

28 Une jolie couverture

Raisonner

Éliane a réalisé une couverture en assemblant des losanges tous identiques.

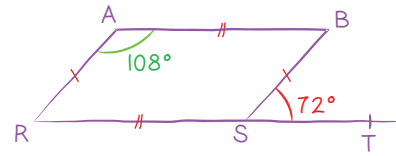


► Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
Comme les losanges sont tous identiques, ils ont tous des côtés de même longueur, donc les diagonales de $ABCD$ sont de la même longueur et elles se coupent en leur milieu.
Donc $ABCD$ est un rectangle.

29 Alignement ?

Raisonner

On considère la figure ci-dessous.

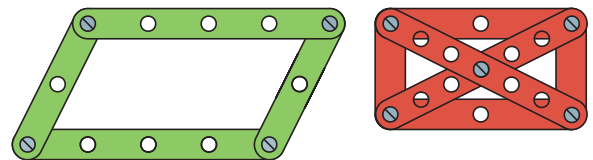


► Les points R , S et T sont-ils alignés ?

Les côtés de $ABSR$ sont deux à deux de même longueur, donc c'est un parallélogramme.
Ainsi, ses angles opposés ont la même mesure, donc on a $\widehat{RAB} = \widehat{RSB} = 108^\circ$.
 $\widehat{RSB} + \widehat{BST} = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$.
Donc les points R , S et T sont alignés.

30 Mécano

Raisonner



Louis construit ces objets avec ses mécanos. Les trous sont espacés régulièrement.

► Dans chaque cas, dire quel quadrilatère particulier modélise la pièce construite. Justifier.

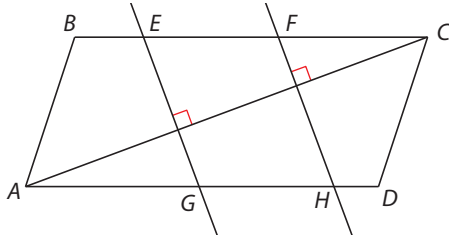
Les côtés opposés des deux objets sont de même longueur, les quadrilatères formés sont donc tous les deux des parallélogrammes.
Les diagonales du quadrilatère rouge sont de même longueur et se coupent en leur milieu, c'est donc un rectangle.

31 Dans un parallélogramme

Raisonner, Communiquer

$ABCD$ est un parallélogramme.

Les points E et F appartiennent à la droite (BC) . Les points G et H appartiennent à la droite (AD) .



1. Que peut-on dire des droites (EF) et (GH) ?

$ABCD$ est un parallélogramme, donc les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Les droites (EF) et (GH) sont donc parallèles.

2. Démontrer que les droites (EG) et (FH) sont parallèles.

(EG) et (FH) sont deux droites perpendiculaires à une même droite (AC) , donc elles sont parallèles entre elles.

3. Quelle est la nature du quadrilatère $EFHG$?

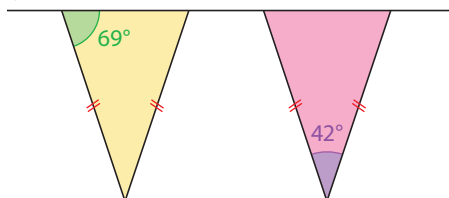
On a démontré que les droites (EF) et (GH) sont parallèles et que les droites (EG) et (FH) sont parallèles.

Le quadrilatère $EFHG$ a donc des côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.

32 Des fanions

Raisonner

Les triangles représentant les deux fanions ci-dessous sont-ils égaux ? Justifier.



Le triangle orange est un triangle isocèle.

Ses deux angles à la base ont donc la même mesure. De plus la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

Donc l'angle du sommet principal du triangle orange mesure $180^\circ - 2 \times 69^\circ = 42^\circ$.

Le triangle rose et le triangle orange ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur.

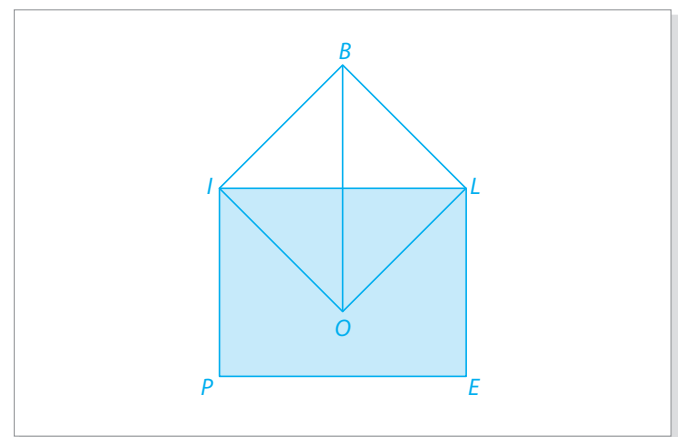
Donc les deux triangles sont égaux.

33 La bonne figure

Représenter, Raisonner

$PILE$ est un rectangle et $BIOL$ est un carré.

1. Faire une figure.



2. Démontrer que $BO = PE$.

$PILE$ est un rectangle, donc ses côtés opposés ont la même longueur, et donc $PE = IL$.

$BIOL$ est un carré, donc ses diagonales ont la même longueur, et donc $BO = IL$.

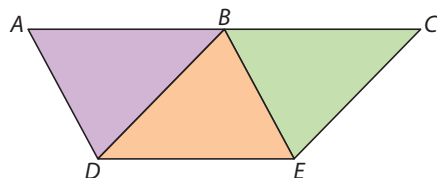
Donc $PE = IL = BO$, donc $BO = PE$.

34 L'un dans l'autre

Raisonner, Communiquer

$ABED$ et $BCED$ sont des parallélogrammes.

► Démontrer que B est le milieu de $[AC]$.



$ABED$ et $BCED$ sont des parallélogrammes, donc (AB)

est parallèle à (DE) et (BC) est parallèle à (DE) .

Ainsi (AB) et (BC) sont parallèles, donc A , B et C sont alignés.

De plus, $AB = DE$ et $BC = DE$, donc $AB = BC$.

B est donc le milieu de $[AC]$.

35 Des triangles

Raisonner

À partir d'un triangle ABC , on construit deux triangles équilatéraux ABD et ACE , à l'extérieur de ABC .

► Démontrer que $CD = BE$.

Montrons que les triangles ADC et ABE sont égaux.

Comme ABD et ACE sont équilatéraux, on a $AD = AB$ et $AC = AE$.

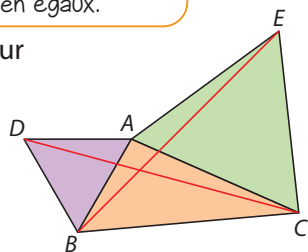
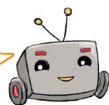
De plus, $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 60^\circ$ et

$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 60^\circ + \widehat{BAC}$, donc $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$.

Les triangles ADC et ABE ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, ils sont donc égaux.

Ainsi $CD = BE$.

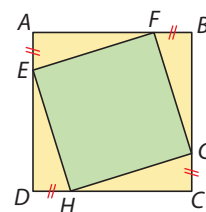
Indice : cherche deux triangles égaux qui te permettraient de conclure, puis démontre qu'ils sont bien égaux.



36 À l'intérieur

Raisonner

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré. E , F , G et H sont des points appartenant respectivement aux segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$ tels que $AE = FB = GC = DH$.



1. Prouver que AEF , FBG , HCG et EHD sont des triangles égaux.

$ABCD$ est un carré donc $AB = BC = CD = DA$.

$FB = GC = DH = AE$ et F , G , H et E sont des points

appartenant respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[DC]$ et $[DA]$, donc $AF = BG = CH = DE$.

De plus, $ABCD$ étant un carré, il possède quatre angles droits, en A , en B , en C et en D .

Ainsi les triangles AFE , BGF , CHG et DEH ont deux à deux un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, ils sont donc égaux.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

Les triangles AFE , BGF , CHG et DEH sont égaux, donc $EF = FG = GH = HE$.

Ainsi, $EFGH$ est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange.

De plus, les triangles AFE , BGF , CHG et DEH étant égaux, ils ont leurs angles deux à deux de même mesure. Donc en particulier, $\widehat{AFE} = \widehat{BGF}$ et $\widehat{AEF} = \widehat{BFG}$. AFE étant un triangle rectangle, la somme des mesures des angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{AEF}$ est égale à 90° , donc $\widehat{AFE}$ et $\widehat{BFG}$ aussi.

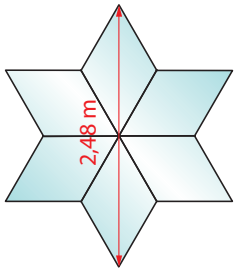
On en déduit donc que $\widehat{EFG} = 90^\circ$.

Ainsi $EFGH$ est un losange avec un angle droit, c'est donc un carré.

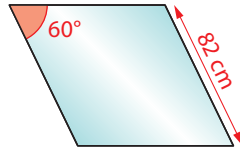
Tâche complexe

37 Pour illuminer son open space, un des murs d'un cabinet d'architecte est constitué d'une rosace vitrée, réalisée à partir de 6 vitres en forme de losanges superposables. Afin de réaliser des économies d'énergie, l'entreprise décide de faire remplacer les vitres par du double vitrage.

Doc 1 Rosace vitrée



Doc 2 Cout d'une vitre



Double vitrage : 350 €/m²
Pose : 119,50 €/vitre

Doc 3 Économies

- Le cabinet d'architecte a des factures d'électricité mensuelles d'environ 680 €.
- Le double vitrage permet de réaliser environ 10 % d'économie sur la facture d'électricité.

► Au bout de combien de temps la facture des travaux sera-t-elle amortie ?

On calcule la hauteur d'un losange : les diagonales sont perpendiculaires

et se coupent en leur milieu, donc la hauteur d'un losange mesure

$$2,48 \text{ m} \div 4 = 0,62 \text{ m} = 62 \text{ cm}.$$

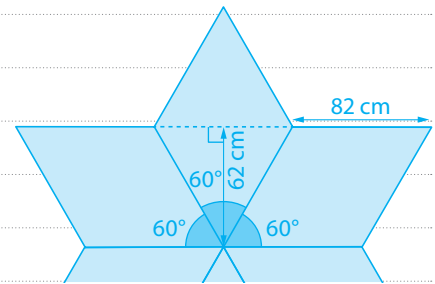
$$A_{\text{losange}} = 0,82 \text{ m} \times 0,62 \text{ m} = 0,5084 \text{ m}^2$$

Cout de remplacement de la rosace :

$$6 \times (0,5084 \times 350 + 119,5) = 1\,784,64 \text{ €}$$

Économies réalisées : 68 €/mois ; $1\,784,64 \div 68 \approx 26,2$ mois

Il faudra donc deux ans et trois mois pour amortir la facture des travaux.



Le jeu

Tangram en tandem

Un premier élève construit :

- 2 triangles égaux rectangles isocèles de côté 8 cm ;
- 1 carré de côté 4 cm ;
- 1 triangle rectangle isocèle de base 8 cm.

Le second élève construit :

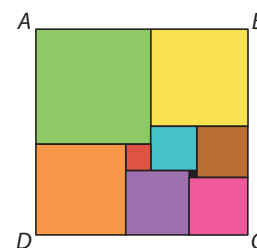
- 2 triangles égaux rectangles isocèles de côté 4 cm ;
- 1 parallélogramme de longueur 4 cm, de largeur la base des triangles égaux et avec deux angles opposés de 45°.

Le binôme regroupe les 7 pièces et, en utilisant toutes les pièces sans les chevaucher, compose un carré, puis un rectangle, puis un chat.

Le défi

Des carrés dans un carré ?

Cette figure est composée de neuf carrés. Le carré noir a pour côté 1 et le carré violet a pour côté 10.



ABCD est-il un carré ? **Non**