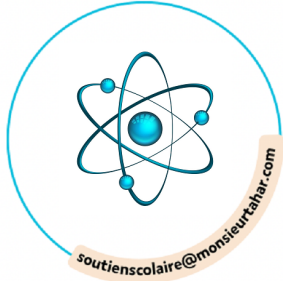


MATHS



CHAPITRE 13



Solides de l'espace

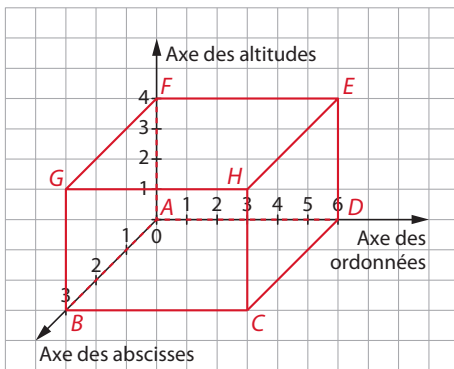


1

Se repérer dans un parallélépipède rectangle

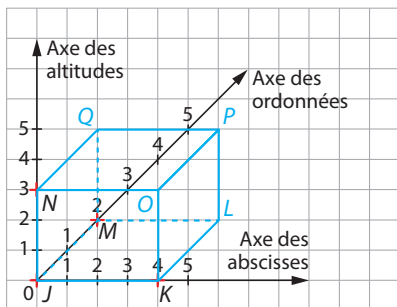
- ▶ Tout point M d'un parallélépipède rectangle peut être **repéré** à partir d'un sommet et des arêtes partant de ce sommet.
- ▶ Un point M est repéré par trois nombres, appelés les **coordonnées** de M : x_M est son **abscisse** ; y_M est son **ordonnée** et z_M est son **altitude**. On note $M(x_M; y_M; z_M)$.

1 Donner les coordonnées des sommets de ce pavé droit représenté dans le repère d'origine A .



$A(0;0;0); B(3;0;0); C(3;6;0); D(0;6;0);$
 $E(0;6;4); F(0;0;4); G(3;0;4)$ et $H(3;6;4)$.

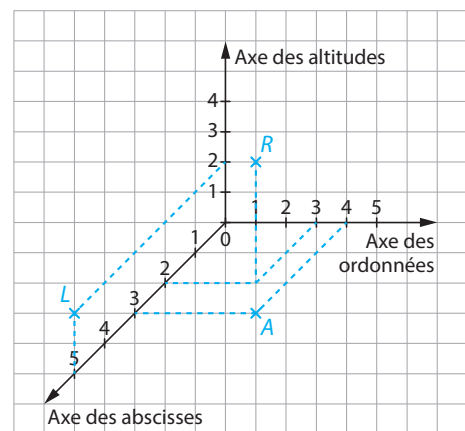
2 Dans le repère ci-dessous, compléter la vue en perspective cavalière du parallélépipède rectangle $JKLMNO$, puis donner les coordonnées de chacun de ses sommets.



$J(0;0;0); K(4;0;0); L(4;2;0); M(0;2;0);$
 $N(0;0;3); O(4;0;3); P(4;2;3)$ et $Q(0;2;3)$.

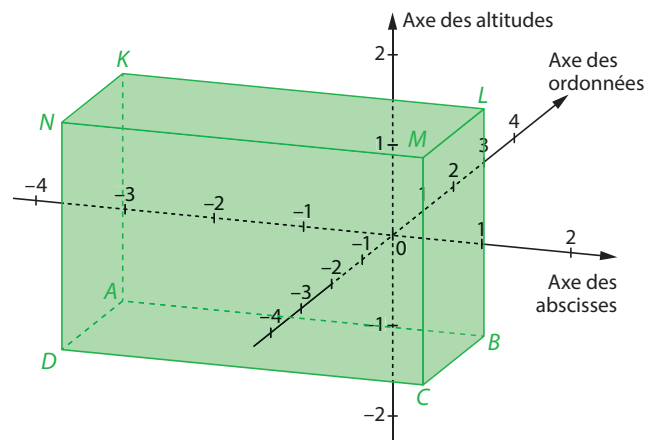
3 Placer les points suivants dans le repère ci-dessous.

- $A(3;4;0)$;
- $L(5;0;2)$;
- $R(2;3;4)$.



4 **MODE EXPERT** Dans le repère ci-dessous, on considère le point $D(-3; -2; -1)$.

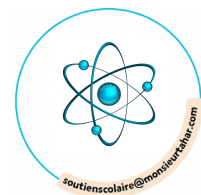
Donner les coordonnées des autres sommets de ce pavé droit en perspective cavalière sachant que les axes sont parallèles aux arêtes.



$A(-3;0;-1); B(1;0;-1); C(1;-2;-1); K(-3;0;1,5);$
 $L(1;0;1,5); M(1;-2;1,5)$ et $N(-3;-2;1,5)$.

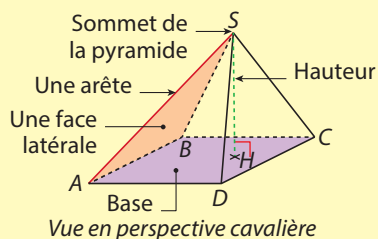


2 Connaitre et représenter une pyramide



► Une **pyramide de sommet S** est un solide dont :

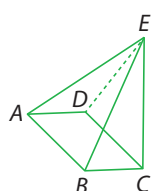
- la **base** est un polygone ;
- les **faces latérales** sont des triangles de sommet S.



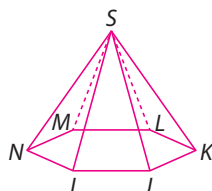
► La **hauteur** d'une pyramide de sommet S est le segment $[SH]$ perpendiculaire au plan de la base, où H est un point de ce plan.

► Une pyramide dont la base est un triangle est appelé un **tétraèdre**.

5



Pyramide 1



Pyramide 2

Compléter le tableau.

Pyramide	1	2
Nature de la base	Quadrilatère	Hexagone
Nombres de faces	5	7
Nombres de faces latérales	4	6
Nombre de sommets	5	7
Nombre d'arêtes	8	12

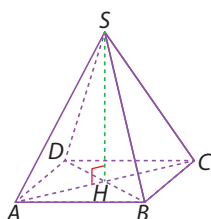
► Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.

► Une **pyramide régulière** est une pyramide dont la base est un polygone régulier et dont la hauteur passe par le centre de la base. Ses faces latérales sont des triangles isocèles égaux.

6 On considère la pyramide régulière $SABCD$.

1. Quelle est la nature de sa base ?

La pyramide est régulière donc sa base est un **carré**.



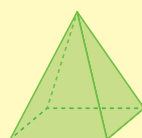
2. Quelle est la nature de SHB ?

H est le centre du carré, donc $[SH]$ est la hauteur de la pyramide, donc SHB est un triangle rectangle en H.

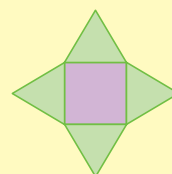
3. Quelle est la nature de SBC ?

$SABCD$ est une pyramide régulière donc SBC est un triangle isocèle en S.

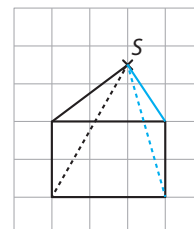
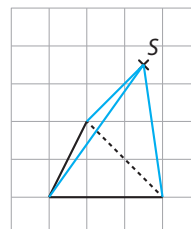
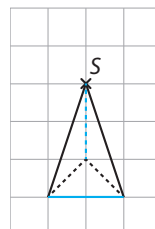
Vue en perspective cavalière



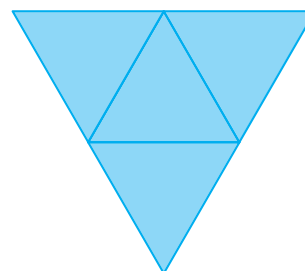
Patron d'une pyramide à base carrée



7 Compléter les vues en perspective cavalière des pyramides de sommet S.



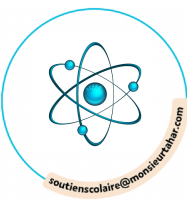
8 Réaliser le patron d'un tétraèdre dont toutes les arêtes mesurent 2 cm.





3

Connaître et représenter un cône de révolution

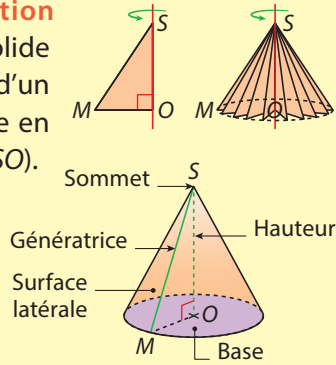


► Un **cône de révolution de sommet S** est un solide obtenu par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O , autour de la droite (SO) .

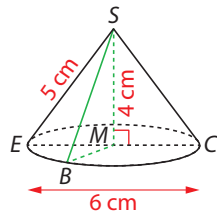
► Le disque de centre O et de rayon OM est la **base** du cône.

► Le segment $[MS]$ est appelé une **génératrice** du cône.

► Le segment $[SO]$ est appelé la **hauteur** du cône.



Vue en perspective cavalière



9 Vrai ou faux ?

a. $[MC]$ mesure 6 cm : **faux**

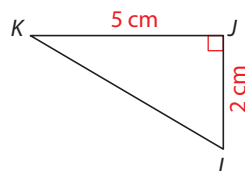
b. La hauteur du cône mesure 5 cm : **faux**

c. SMC est un triangle rectangle : **vrai**

d. $SC = 5$ cm : **vrai**

e. SEB est un triangle rectangle : **faux**

10 On souhaite créer un ou des cônes de révolution à partir du triangle rectangle ci-contre.



1. Entourer la ou les phrases qui conviennent.

a. On fait tourner le triangle IJK autour de $[IJ]$.

b. On fait tourner le triangle IJK autour de $[JK]$.

c. On fait tourner le triangle IJK autour de $[IK]$.

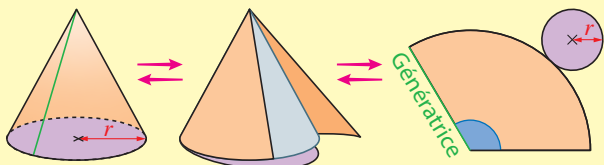
2. Préciser le sommet, la hauteur, le centre et le rayon du disque de base du ou des cônes obtenus.

a. Sommet : I , hauteur : $[IJ]$, centre : J , rayon : 5 cm

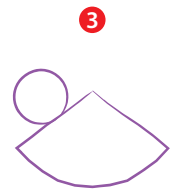
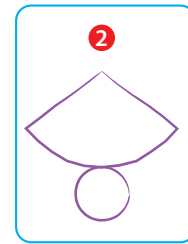
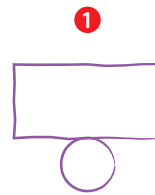
b. Sommet : K , hauteur : $[JK]$, centre : J , rayon : 2 cm

Vue en perspective cavalière

Patron



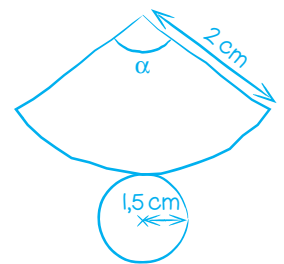
11 Parmi les figures suivantes, entourer celle qui représente un patron de cône de révolution.



12 On souhaite construire un patron d'un cône de révolution de génératrice 2 cm et de rayon 1,5 cm.

1. Commencer par faire un patron à main levée, puis calculer la longueur du cercle de rayon 1,5 cm, qui doit être égale à la longueur de l'arc de cercle.

$$2 \times \pi \times 1,5 \text{ cm} = 3\pi \text{ cm}$$

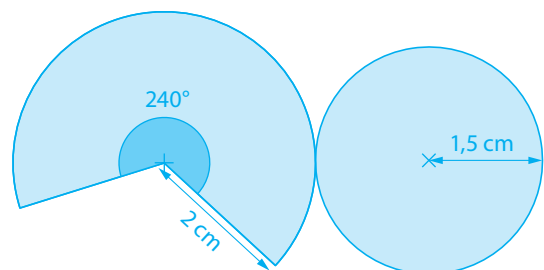


2. En complétant le tableau ci-dessous, calculer la mesure de l'angle α , sachant que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de son angle.

Mesure de l'angle (en °)	360	α
Longueur de l'arc (en cm)	4π	3π

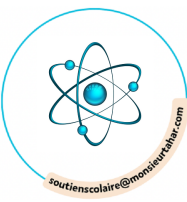
$$\alpha = \frac{360^\circ \times 3\pi}{4\pi} = 270^\circ$$

3. Construire le patron en vraie grandeur.





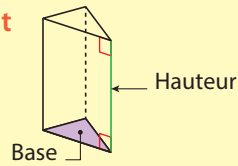
4 Calculer des volumes



► Le **volume V d'un prisme droit**

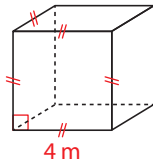
est donné par la formule :

$$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$



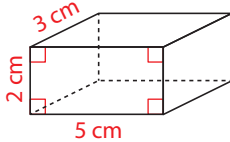
13 Calculer le volume des prismes droits suivants.

a.



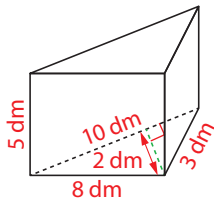
$$V = 4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 64 \text{ m}^3$$

b.



$$V = 5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^3$$

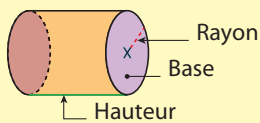
c.



$$V = \frac{2 \text{ dm} \times 10 \text{ dm}}{2} \times 5 \text{ dm} = 50 \text{ dm}^3$$

► Le **volume V d'un cylindre de révolution** de rayon r et de hauteur h est donné par la formule :

$$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \pi \times r \times r \times h$$



14 Entourer le ou les calculs permettant de calculer le volume d'un cylindre de révolution de 10 cm de diamètre et de hauteur 12 cm.

a. $10 \times 10 \times \pi \times 12$

b. $5 \times 5 \times \pi \times 12$

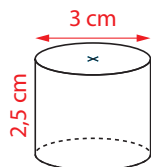
c. $12 \times 10 \times \pi \times \pi$

d. $12 \times 12 \times \pi \times 10$

15 Calculer le volume exact puis approché au mm^3 du cylindre de révolution ci-contre.

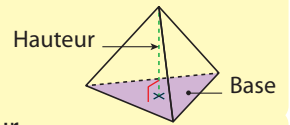
$$1,5 \times 1,5 \times \pi \times 2,5 = 5,625\pi$$

$$V = 5,625\pi \text{ cm}^3 \approx 17,671 \text{ cm}^3$$



► Le **volume V d'une pyramide** est donné par la formule :

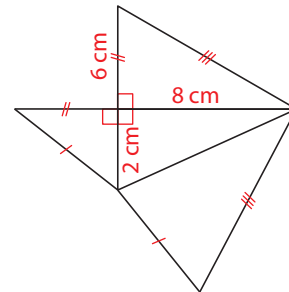
$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$



16 Calculer le volume d'une pyramide de hauteur 5 cm et dont la base est un carré de côté 3 cm.

$$\frac{3^2 \times 5}{3} = 15 \text{ donc } V = 15 \text{ cm}^3$$

17 **MODE EXPERT** On considère la pyramide dont un patron est représenté ci-dessous.

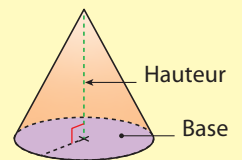


Calculer le volume de cette pyramide.

$$\frac{\frac{2 \times 8}{2} \times 6}{3} = \frac{8 \times 6}{3} = 16 \text{ donc } V = 16 \text{ cm}^3$$

► Le **volume V d'un cône de révolution** est donné par la formule :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$



18 Entourer le ou les calculs permettant de trouver le volume d'un cône de révolution de hauteur 5 cm et dont la base est un disque de rayon 3 cm.

a. $\frac{6 \times 6 \times \pi \times 5}{3}$

b. $\frac{3 \times 3 \times \pi \times 10}{3}$

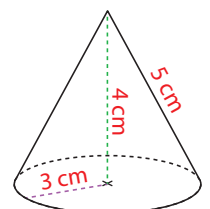
c. $\frac{3 \times 3 \times \pi \times 5}{3}$

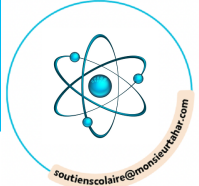
d. $\frac{2 \times \pi \times 2 \times 5}{3}$

19 Calculer le volume exact puis approché au dixième du cône de révolution ci-contre.

$$\frac{3 \times 3 \times \pi \times 4}{3} = 12\pi$$

$$V = 12\pi \text{ cm}^3 \approx 37,7 \text{ cm}^3$$





20 Parcours ceinture jaune

1. Comment se nomment les trois axes lorsqu'on se repère dans un parallélépipède rectangle ?

Abscisse, ordonnée et altitude.

2. Combien possède de sommets une pyramide à base carrée ? 5

3. Est-ce un patron d'une pyramide ?

Non



4. Quel est le volume d'une pyramide de hauteur 6 cm et dont la base est un carré de côté 4 cm ?

32 cm^3

5. Quel est le volume exact d'un cône de révolution de rayon 9 dm et de hauteur 10 dm ?

$270\pi \text{ dm}^3$

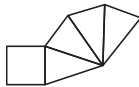
21 Parcours ceinture verte

1. Dans un repère, un point V a pour coordonnées (3 ; 2 ; 1). Quelle est son altitude ? 1

2. Combien possède de faces une pyramide à base carrée ? 5

3. Est-ce un patron d'une pyramide ?

oui



4. Quel est le volume d'une pyramide de hauteur 5 cm et dont la base est un rectangle de longueur 10 cm et de largeur 9 cm ?

150 cm^3

5. Quel est le volume exact d'un cône de révolution de rayon 3 dm et de hauteur 15 cm ?

$4,5\pi \text{ dm}^3$

22 Parcours ceinture noire

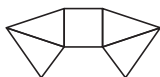
1. Dans un repère, un point M a pour coordonnées (2 ; 0 ; 0). Sur quel axe est-il ?

Sur l'axe des abscisses.

2. Combien d'arêtes possède un tétraèdre ? 6

3. Est-ce un patron d'une pyramide ?

Non



4. Quel est le volume d'un tétraèdre dont la base est un triangle rectangle de longueurs de côtés de l'angle de droit 3 et 4 cm, et qui a pour hauteur 7 cm ? 14 cm^3

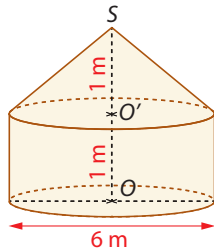
5. Quel est le volume exact d'un cône de révolution de diamètre 18 m et de hauteur 4 m ?

$108\pi \text{ dm}^3$

23 La yourte

Calculer

Arya veut construire une yourte, représentée par un cylindre droit d'axe (OO') surmonté d'un cône de révolution de sommet S .



1. Calculer le volume exact de la partie cylindrique.

$$\pi \times r^2 \times h = \pi \times (6 \div 2)^2 \times 1 = 9\pi$$

$$\text{donc } \mathcal{V}_1 = 9\pi \text{ m}^3.$$

2. Calculer le volume exact de la partie conique.

$$\frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times (6 \div 2)^2 \times 1}{3} = 3\pi$$

$$\text{donc } \mathcal{V}_2 = 3\pi \text{ m}^3.$$

3. En déduire une valeur approchée au m^3 du volume de la yourte.

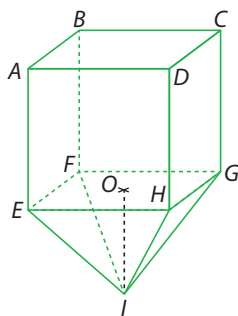
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 12\pi \text{ m}^3 \approx 38 \text{ m}^3$$

24 Pop-Corn

Calculer

Un réservoir à grain de maïs est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un pavé droit.

- $AB = 2 \text{ m}$
- $AE = 5 \text{ m}$
- hauteur de la pyramide : $OI = 1,5 \text{ m}$.



1. Calculer le volume du pavé en m^3 .

$$\mathcal{V}_{\text{pavé}} = 2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^3$$

2. Calculer le volume de la pyramide en m^3 .

$$\frac{2^2 \times 1,5}{3} = 2$$

$$\text{donc } \mathcal{V}_{\text{pyramide}} = 2 \text{ m}^3.$$

3. En déduire le volume exact de maïs que peut contenir le réservoir.

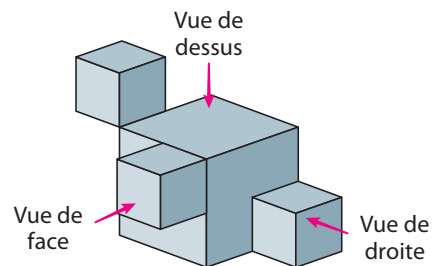
$$\mathcal{V}_{\text{réservoir}} = \mathcal{V}_{\text{pavé}} + \mathcal{V}_{\text{pyramide}} = 22 \text{ m}^3$$

25 D'après DNB Asie 2017

Calculer, Représenter

La figure ci-dessous représente un solide constitué de l'assemblage de quatre cubes :

- trois cubes d'arête 2 cm ;
- un cube d'arête 4 cm.

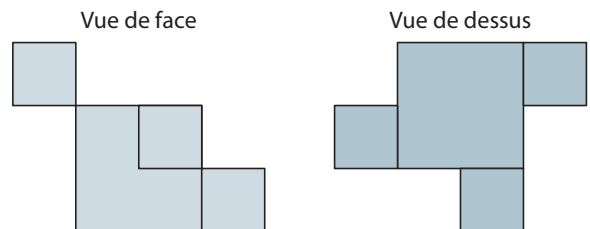


1. Quel est le volume de ce solide ?

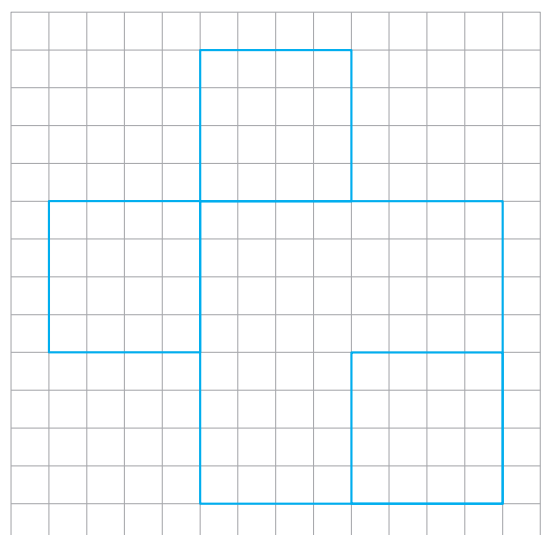
$$3 \times 2^3 + 4^3 = 3 \times 8 + 64 = 88$$

$$\mathcal{V} = 88 \text{ cm}^3$$

2. On a dessiné deux vues de ce solide (elles ne sont pas en vraie grandeur).



Dessiner la vue de droite de ce solide en vraie grandeur.

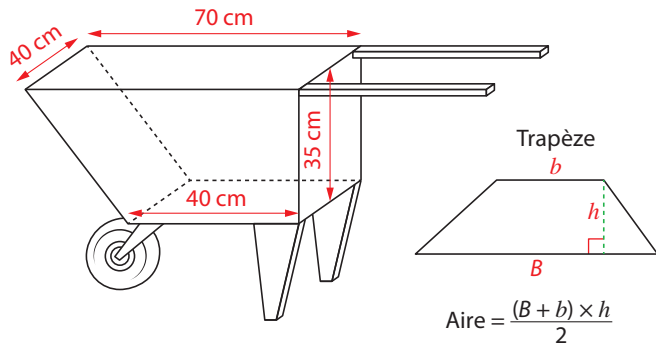


26 D'après DNB Centres étrangers 2018

Calculer, Communiquer

Alain veut une brouette pouvant transporter au moins 60 L.

Son choix se porte sur la brouette ci-dessous qui a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze.



► A-t-il fait le bon choix ?

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

$$40 \text{ cm} = 4 \text{ dm} ; 70 \text{ cm} = 7 \text{ dm} ; 35 \text{ cm} = 3,5 \text{ dm}.$$

$$A_{\text{base}} = (4 \text{ dm} + 7 \text{ dm}) \times 3,5 \text{ dm} \div 2 = 19,25 \text{ dm}^2$$

$$V_{\text{brouette}} = A_{\text{base}} \times \text{hauteur} = 19,25 \text{ dm}^2 \times 4 \text{ dm} = 77 \text{ dm}^3$$

La volume de la brouette est de 77 dm³ soit 77 L.

Alain pourra donc transporter au moins 60 L,

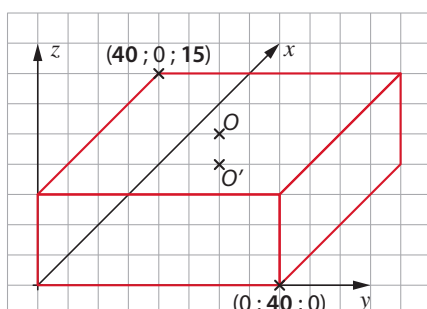
il a donc fait le bon choix.

27 Commande numérique

Représenter

Xavier doit programmer une machine à commande numérique pour percer en série une pièce métallique ayant la forme d'un pavé droit de dimensions 40 mm, par 40 mm et par 15 mm.

Les pièces sont positionnées comme sur le schéma ci-dessous.



La pièce doit être percée au centre de sa face supérieure au niveau du point O et sur une profondeur de 5 mm, jusqu'au point O'.

► Donner les coordonnées des points O et O'.

$$O(20; 20; 15)$$

$$O'(20; 20; 10)$$

28 D'après DNB Métropole 2017

Calculer, Chercher

Léo a ramassé des fraises pour faire de la confiture. Après cuisson des fraises avec du sucre, il a obtenu 2,7 litres de confiture. Il verse la confiture dans des pots cylindriques de 6 cm de diamètre et de 12 cm de haut, qu'il remplit jusqu'à 1 cm du bord supérieur.

1. Combien pourra-t-il remplir de pots ?

$$2,7 \text{ L} = 2,7 \text{ dm}^3 = 2700 \text{ cm}^3.$$

Il faut répartir 2700 cm³ de confiture dans les pots.

$$12 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$$

$$6 \text{ cm} \div 2 = 3 \text{ cm}$$

$$\pi \times 3^2 \times 11 = 99\pi.$$

Chaque pot contient un volume 99π cm³ de confiture.

$$2700 \div 99\pi \approx 8,7.$$

Il pourra remplir 9 pots dont 8 entièrement.

2. Il colle ensuite sur ses pots une étiquette rectangulaire de fond blanc qui recouvre toute la surface latérale du pot.

Montrer que la longueur de l'étiquette est d'environ 18,8 cm.

La longueur de l'étiquette correspond au périmètre de la base du cylindre.

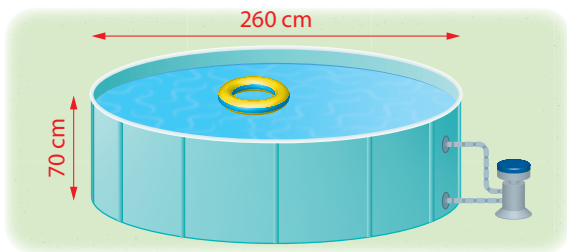
$$P = 6 \text{ cm} \times \pi \approx 18,8 \text{ cm}.$$

Tâche complexe

29

Laure veut acheter pour ses filles une piscine cylindrique hors sol équipée d'une pompe électrique. Elle compte l'utiliser l'été, du mois de juin au mois de septembre inclus. Elle dispose d'un budget de 200 €.

Doc 1 Caractéristiques techniques de la piscine



- Hauteur de l'eau : 65 cm
- Consommation électrique moyenne de la pompe : 3,42 kWh par jour.
- Prix (piscine + pompe) : 80 €.

Doc 2 Le kilowatt-heure

- Le kWh (kilowatt-heure) est une unité de mesure de l'énergie électrique.
- Prix d'un kWh : 0,15 €.

Doc 3 Prix de l'eau

Prix d'un m³ d'eau : 2,03 €

À l'aide des documents suivants, dire si le budget de Laure est suffisant pour l'achat de cette piscine et les frais de fonctionnement pendant une année.

$$260 \text{ cm} = 2,6 \text{ m et } 65 \text{ cm} = 0,65 \text{ m}$$

$$V_{\text{piscine}} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$$

$$\pi \times (2,6 \div 2)^2 \times 0,65 \approx 3,45$$

$$V_{\text{piscine}} \approx 3,45 \text{ m}^3$$

Le volume d'eau pour la piscine est d'environ 3,45 m³.

$$3,45 \times 2,03 \approx 7$$

Laure va payer environ 7 € pour l'eau.

Les mois de juin et septembre ont 30 jours, ceux de juillet et août 31 jours.

$$(30 \times 2 + 31 \times 2) \times 3,42 \times 0,15 = 62,586$$

Laure va payer environ 62,60 € pour l'électricité.

$$7 + 62,6 + 80 = 149,6$$

En tout, Laure va payer environ 149,60 €.

Son budget de 200 € est donc suffisant.



Le jeu

À la Sierpinski !

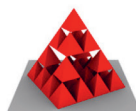
Chaque élève construit jusqu'à 5 pyramides régulières à base carré dont les arêtes mesurent toutes 3 cm de côté sur des papiers de couleurs différents. Tous ensemble, les élèves rassemblent les pyramides et construisent une pyramide en suivant le modèle de Sierpinski ci-dessous.



Étape 1



Étape 2

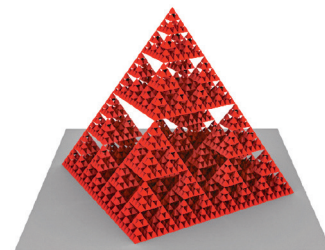


Étape 3

Le défi

Moult pyramides

Combien de pyramides y a-t-il dans cette pyramide de Sierpinski (étape 6) ?



$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3.125$$

La piste cyclable mesure environ 756 m.

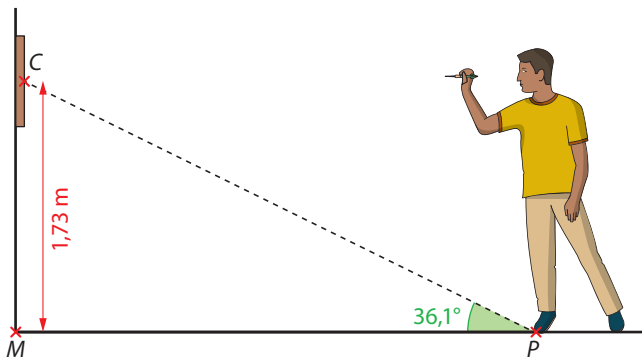
3 Droit au but

Chercher, Raisonner, Calculer

Le jeu de fléchettes consiste à lancer trois fléchettes sur une cible. La position des fléchettes sur la cible détermine le nombre de points obtenus.

La cible est installée de sorte que son centre se trouve à 1,73 m du sol.

Les pieds du joueur ne doivent pas être trop proches de la cible lorsqu'il lance les fléchettes. Pour cela, un dispositif électronique est installé, qui mesure l'angle formé par la droite passant par le centre de la cible et le pied avec le sol. Il sonne si l'angle est supérieur à $36,1^\circ$.



1. Un joueur s'apprête à lancer une fléchette.

Il se trouve à 2,40 m. Le mur est perpendiculaire au sol. Est-ce que la sonnerie va se déclencher ? Justifier la réponse.

Dans le triangle PMC rectangle en M ,

d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$CP^2 = CM^2 + MP^2$$

$$CP^2 = 1,73^2 + 2,40^2 = 8,7529$$

$$CP = \sqrt{8,7529} \approx 2,96$$

$$\text{De plus, } \cos \widehat{MPC} = \frac{MP}{CP}$$

$$\cos \widehat{MPC} = 2,4 \div 2,96 \approx 0,81$$

$$\widehat{MPC} \approx 35,9^\circ$$

Comme $35,9^\circ < 36,1^\circ$, la sonnerie ne se déclenche pas.

2. On a relevé, dans le tableau ci-dessous, les points obtenus par Louis et Candice lors de sept parties de fléchettes. Le résultat de Candice lors de la partie 6 a été égaré.

Partie	1	2	3	4	5	6	7	Moyenne
Louis	40	35	85	67	28	74	28	
Candice	12	62	7	100	81		30	51

a. Calculer le nombre moyen de points obtenus par Louis.

$$\frac{40 + 35 + 85 + 67 + 28 + 74 + 28}{7} = 51$$

Louis a une moyenne de 51 points.

b. Sachant que Candice a obtenu en moyenne 51 points par partie, calculer le nombre de points qu'elle a obtenus à la 6^e partie.

On note x le nombre de points obtenus par Candice à la 6^e partie.

$$\text{On a } \frac{12 + 62 + 7 + 100 + 81 + x + 30}{7} = 51$$

$$\text{Ainsi, } 292 + x = 7 \times 51$$

$$292 + x = 357$$

$$x = 357 - 292 = 65$$

Candice a obtenu 65 points à la 6^e partie.

c. Déterminer la médiane de la série de points obtenus par Louis, puis par Candice.

Points de Louis dans l'ordre croissant :

28 28 35 40 67 74 85

Comme il y a 7 valeurs, la médiane est la 4^e valeur dans l'ordre croissant, soit 40.

Points de Candice dans l'ordre croissant :

7 12 30 62 65 81 100

Comme il y a 7 valeurs, la médiane est la 4^e valeur dans l'ordre croissant, soit 62.