MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

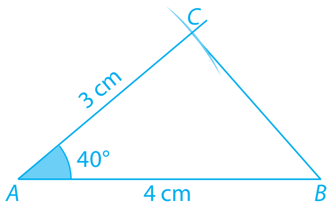
CHAPITRE 10

Chapitre 10 Triangles et cercles

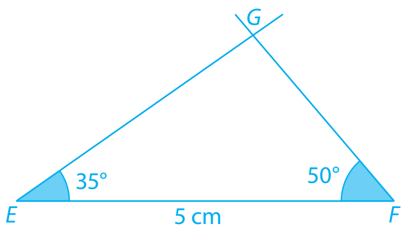
1 Construire un triangle

- On peut construire un triangle dans les deux cas suivants :
  - si on connait la **longueur de deux côtés** et la **mesure de l'angle formé par ces deux côtés** ;
  - si on connait la **longueur d'un côté** et **les mesures de deux angles** dont la somme est inférieure à 180°.

1 Construire le triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm et $\widehat{BAC} = 40°$.



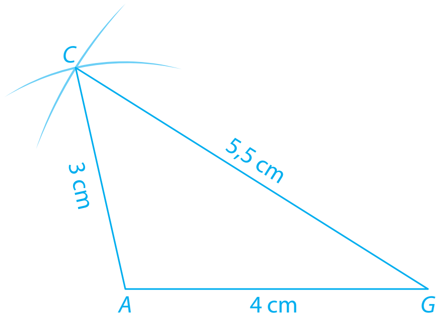
2 Construire le triangle EFG tel que $EF = 5$ cm, $\widehat{FEG} = 35°$ et $\widehat{EFG} = 50°$.



- Dans un triangle, la longueur de chaque côté est **inférieure** à la somme des longueurs des deux autres côtés.
- On peut construire un triangle dont on connait les longueurs des trois côtés lorsque la longueur de son plus grand côté est **inférieure** à la somme des longueurs des deux autres côtés.

3 Peut-on construire un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm et $BC = 5,5$ cm ?
Si oui, le construire.

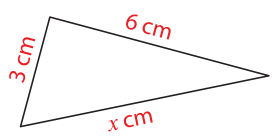
La plus grande des longueurs est 5,5 cm. La somme des deux autres côtés est égale à 3 cm + 4 cm = 7 cm.
$5,5 < 7$ donc on peut construire ce triangle.



4 Peut-on construire un triangle ABC tel que $AB = 2,5$ cm, $AC = 3,5$ cm et $BC = 7$ cm ?
Si oui, le construire.

La plus grande des longueurs est 7 cm.
La somme des longueurs des deux autres côtés est :
2,5 cm + 3,5 cm = 6 cm.
$7 > 6$, donc on ne peut pas construire le triangle ABC.

5 MODE EXPERT On veut construire tous les triangles dont les longueurs des côtés sont marquées sur la figure ci-dessous et où x est la longueur du plus grand côté qui est un nombre entier de centimètres.
Combien de triangles (non aplatis) peut-on construire ?



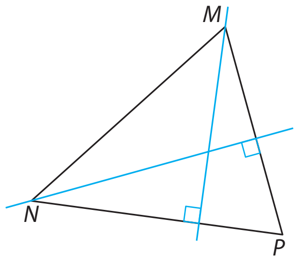
On doit avoir x inférieur à $3 + 6 = 9$. De plus, x doit être supérieur à 6 car c'est le plus grand côté. Donc x peut être égal à 7 ou 8. On peut construire deux triangles.

2 Construire des hauteurs

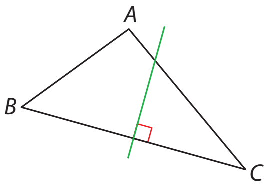
◗ La **hauteur** d'un triangle *ABC* **issue de *A*** est la droite passant par *A* et perpendiculaire à la droite (*BC*).
◗ Un triangle possède **trois hauteurs**, chacune issue d'un des trois sommets.

◗ Les trois hauteurs d'un triangle sont **concourantes** : elles passent par un même point appelé **orthocentre** du triangle.
◗ Pour construire l'orthocentre, il suffit de tracer deux hauteurs.

6 Dans le triangle *MNP* ci-dessous, construire la hauteur issue de *M* et la hauteur issue de *N*.

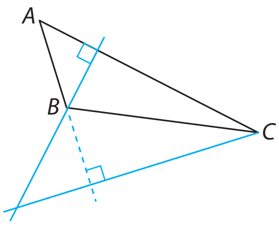


7 Lors de son dernier devoir de mathématiques, Tom devait tracer la hauteur issue de *A* dans le triangle *ABC*. Tom ne comprend pas pourquoi le professeur a écrit « Faux » sur sa copie. Expliquer.

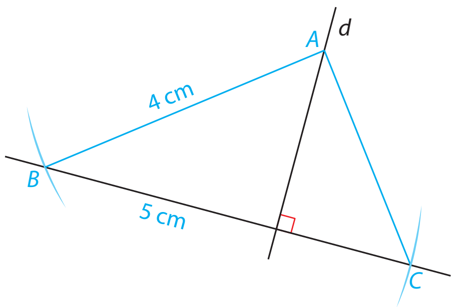


La droite tracée est bien perpendiculaire à la droite (*BC*) mais elle ne passe pas par *A*.

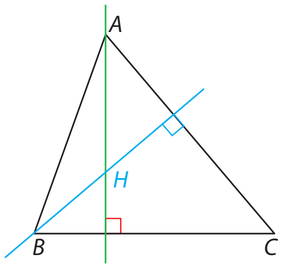
8 Dans le triangle *ABC*, tracer la hauteur issue du sommet *B* et la hauteur issue du sommet *C*.



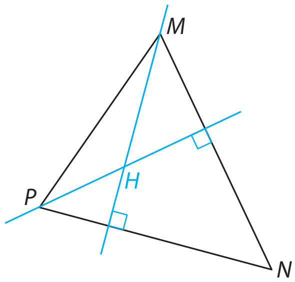
9 MODE EXPERT Construire un triangle *ABC* dont la droite d est la hauteur issue de *A* et tel que $AB = 4$ cm et $BC = 5$ cm.



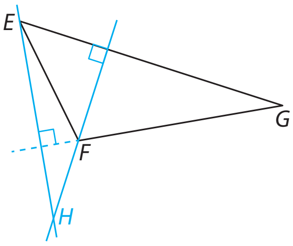
10 Dans le triangle ci-dessous, la hauteur issue de *A* a été tracée. Construire la hauteur issue de *B* et placer l'orthocentre *H*.



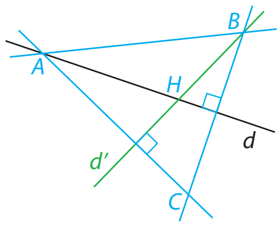
11 Construire l'orthocentre *H* du triangle *MNP* ci-dessous.



12 Construire l'orthocentre *H* du triangle *EFG*.



13 MODE EXPERT Tracer un triangle *ABC* tel que la droite d soit la hauteur issue de *A*, la droite d' soit la hauteur issue de *B* et l'orthocentre *H* soit à l'intérieur du triangle *ABC*.

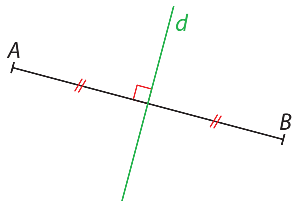


3 Construire des médiatrices

◗ La **médiatrice** d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
◗ *A* et *B* désignent deux points distincts. La médiatrice du segment [*AB*] est l'ensemble de tous les points situés à égale distance de *A* et de *B*.

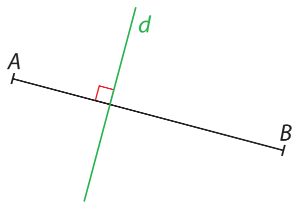
14 Dans chaque cas, indiquer si la droite *d* est la médiatrice du segment [*AB*] ou non. Justifier.

a.



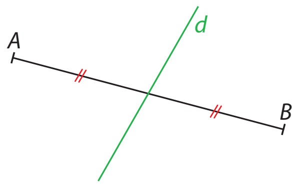
La droite *d* est la médiatrice du segment [*AB*] car elle est perpendiculaire à [*AB*] et passe par son milieu.

b.



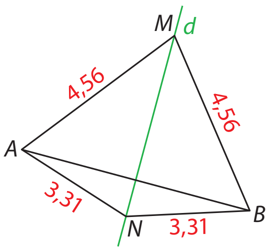
La droite *d* n'est pas la médiatrice de [*AB*] car elle ne passe pas par le milieu de [*AB*].

c.



La droite *d* n'est pas la médiatrice de [*AB*] car elle n'est pas perpendiculaire au segment [*AB*].

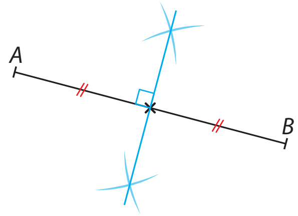
d.



MA = *MB* et *NA* = *NB* donc *M* et *N* appartiennent à la médiatrice de [*AB*], qui est donc la droite *d*.

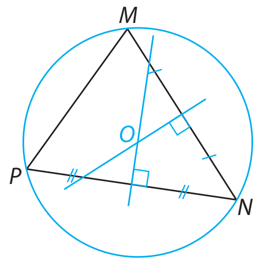
◗ Pour **construire la médiatrice** d'un segment [*AB*], on peut placer, à l'aide d'un **compas**, deux points à égale distance de *A* et de *B*.

15 Construire la médiatrice du segment [*AB*] en utilisant le compas et la règle non graduée.

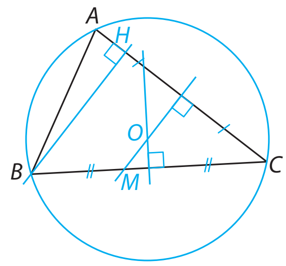


◗ Dans un triangle, les médiatrices des trois côtés sont concourantes : elles se coupent en un même point qui est le centre du cercle passant par les sommets du triangle. Ce cercle est appelé le **cercle circonscrit au triangle**.

16 Construire deux médiatrices du triangle *MNP*, puis tracer le cercle circonscrit à ce triangle.



17 MODE EXPERT **1.** Construire le cercle circonscrit au triangle *ABC*. Nommer son centre *O*.



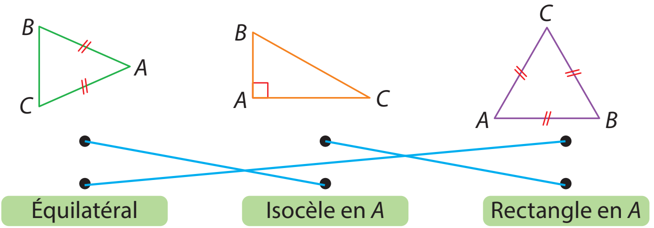
2. On note *M* le point d'intersection de la droite (*BC*) et de la médiatrice du segment [*AC*], et *H* le pied de la hauteur du triangle *ABC* issue de *B*.
Montrer que $\widehat{CMO} = \widehat{CBH}$.

Les droites (*BH*) et (*MO*) sont perpendiculaires à (*AC*). Elles sont donc parallèles entre elles. Elles forment avec la sécante (*BC*) les angles correspondants $\widehat{CMO}$ et $\widehat{CBH}$ qui sont donc de même mesure.

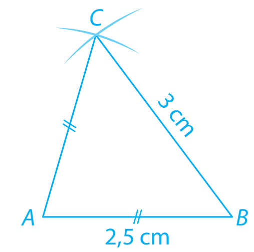
4 Connaitre les triangles particuliers

- Un **triangle rectangle** est un triangle qui possède un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**.
- Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.
- Un **triangle équilatéral** est un triangle qui a trois côtés de même longueur.

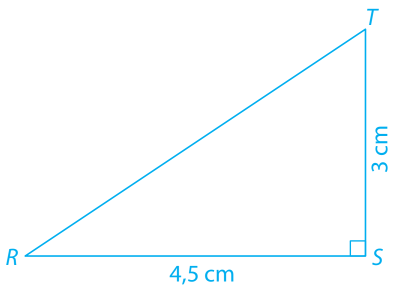
18 Relier chaque triangle au nom qui lui correspond.



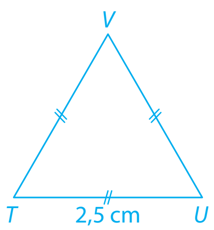
19 Construire un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 2{,}5$ cm et $BC = 3$ cm.



20 Construire un triangle RST rectangle en S tel que $RS = 4{,}5$ cm et $ST = 3$ cm.

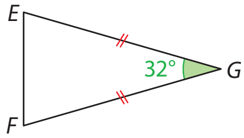


21 Construire un triangle TUV équilatéral de côté 2,5 cm.



- Si un triangle ABC est isocèle en A, alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont **même mesure**.
Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont même mesure, alors le triangle ABC est **isocèle** en A.
- Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles mesurent chacun **60°**.
Si un triangle a trois angles de même mesure, alors il est **équilatéral**.

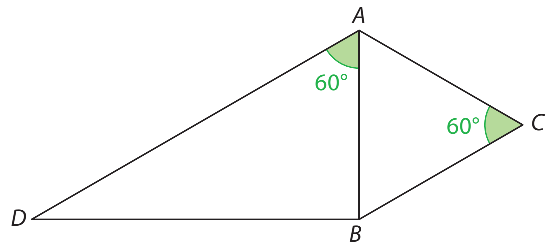
22 Calculer les mesures des angles $\widehat{GEF}$ et $\widehat{GFE}$ et du triangle EFG ci-contre. Justifier.



Le triangle EFG est isocèle en G,

donc $\widehat{GEF} = \widehat{GFE} = (180° - 32°) \div 2 = 74°$.

23 ABD est un triangle tel que $\widehat{BAD} = 60°$. ABC est un triangle tel que $\widehat{BCA} = 60°$. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.



Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Les droites (AD) et (BC) sont parallèles donc

les angles alternes-internes $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ABC}$ ont même

mesure. Donc $\widehat{ABC} = 60°$.

$\widehat{BAC} = 180° - (60° + 60°) = 60°$

Le triangle ABC possède trois angles de même

mesure 60°, donc il est équilatéral.

24 MODE EXPERT Prouver que dans un triangle équilatéral, la médiatrice et la hauteur issue du même sommet sont confondues.

Si ABC est un triangle équilatéral, alors $AB = AC$ donc

le point A appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

Cette médiatrice passe donc par le point A et est

perpendiculaire au côté $[BC]$, c'est donc aussi la

hauteur issue de A du triangle ABC. On fait le même

raisonnement pour les sommets B et C.

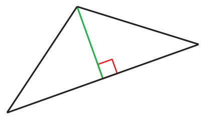
Automatismes

25 Parcours ceinture jaune

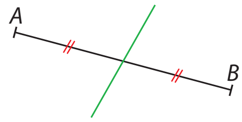
1. Peut-on construire le triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 5$ cm ? Oui

2. Peut-on construire le triangle ABC tel que $AB = 1$ cm, $BC = 1$ cm et AC = 10 cm ? Non

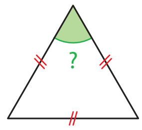
3. La droite verte tracée ci-dessous est-elle une hauteur du triangle ? Oui



4. La droite verte ci-dessous est-elle la médiatrice du segment $[AB]$? Non



5. Combien mesure cet angle ? 60°

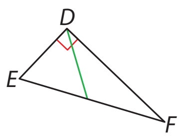


26 Parcours ceinture verte

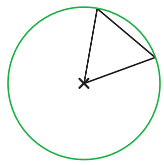
1. Peut-on construire le triangle ABC tel que $AB = 0{,}74$ cm, $BC = 0{,}6$ cm et $AC = 1{,}21$ cm ?

Oui

2. La droite verte tracée ci-dessous est-elle la hauteur du triangle issue de D ? Non

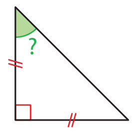


3. Le cercle ci-contre est-il le cercle circonscrit au triangle ? Non



4. Combien mesure cet angle ?

45°



27 Parcours ceinture noire

1. x est un nombre entier positif non nul. Peut-on toujours construire le triangle ABC tel que $AB = 3x$, $AC = 2x$ et $BC = 2x$? Oui car $2x + 2x > 3x$

2. Deux hauteurs d'un triangle peuvent-elles être parallèles entre elles ? Non

3. Quelle est la nature d'un triangle dont les médiatrices de deux côtés sont perpendiculaires ?

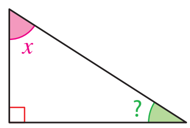
Il est rectangle.

4. Exprimer la mesure de l'angle vert en fonction de x.

$90 - x$

Combien mesure l'angle vert si l'angle rose mesure 27° ?

63°

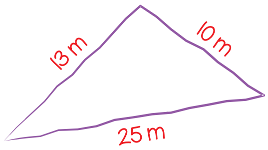


Problèmes

ceinture jaune · ceinture verte · ceinture noire

28 Le potager
Raisonner, Calculer

Mathias veut installer un potager triangulaire dans son jardin. Il fait tout d'abord le plan suivant à main levée.



- Pourra-t-il réaliser son potager ? Justifier.

La plus grande longueur 25 est supérieure à 10 + 13.

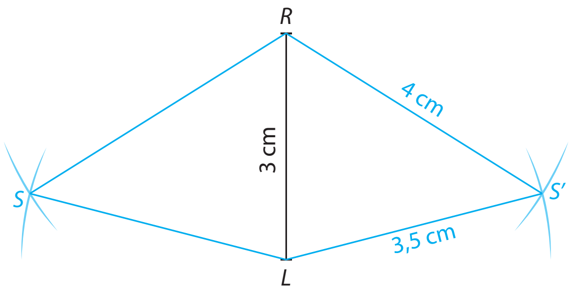
Donc le triangle ne peut pas être construit.

Mathias ne pourra pas réaliser le potager prévu.

29 La forêt
Raisonner, Modéliser

Rihanna et Laetitia sont cachées dans une forêt à 300 m l'une de l'autre. Elles veulent communiquer par téléphone avec Sami qui leur dit qu'il est lui aussi caché dans la forêt à 400 m de Rihanna et à 350 m de Laetitia.

1. Dans le plan ci-dessous, le point *R* représente la position de Rihanna, le point *L* celle de Laetitia. Construire les deux positions *S* et *S'* où peut se trouver Sami.



Échelle : 1 cm pour 100 m

2. La droite (*SS'*) est-elle la médiatrice du segment [*RL*] ? Justifier.

S et *S'* ne sont pas équidistants de *R* et de *L*,

donc (*SS'*) n'est pas la médiatrice de [*RL*].

30 Les chemins
Modéliser

Les maisons de Nina et Aaron se trouvent respectivement à 1 000 m et 1 200 m du collège.

1. Nina pense que sa maison est située à 2 300 m de celle d'Aaron. Aaron n'est pas d'accord et affirme que sa maison est située à 1 500 m de celle de Nina.
L'un des deux a tort. Lequel ?

Si la plus grande des valeurs est égale à 2 300,

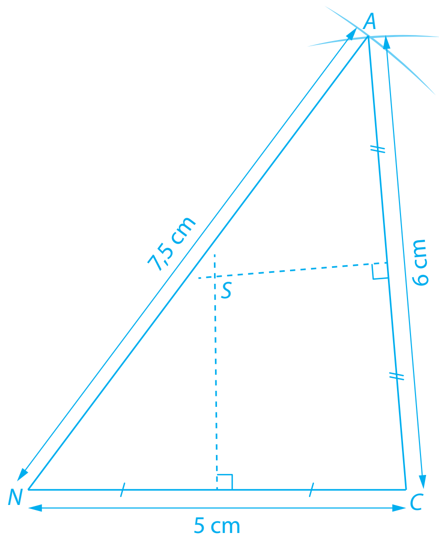
alors la somme des deux autres côtés qui est égale à

2 200, est inférieure à 2 300. Un tel triangle ne peut

pas exister.

C'est donc Nina qui a tort.

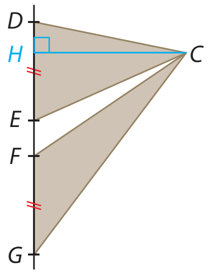
2. La salle de sport où se retrouvent régulièrement Aaron et Nina est située à égale distance du collège et de leurs deux maisons. Réaliser un plan à l'échelle $\frac{1}{20\,000}$ de l'emplacement de leurs maisons, du collège et de la salle de sport.



Problèmes

31 Le sculpteur
Modéliser, Raisonner

Pour réaliser ses œuvres, un sculpteur décide d'utiliser des plaques triangulaires en bronze ayant toutes la même aire. Il affirme que les deux plaques triangulaires *CDE* et *CFG* représentées ci-dessous respectent cette condition, sachant que les points *D*, *E*, *F* et *G* sont alignés.



1. A-t-il raison ? Justifier.

On trace la hauteur (*CH*) issue de *C* dans le triangle *DCE*. C'est la droite passant par *C* et perpendiculaire à (*DE*) en *H*.

Or (*CH*) est aussi perpendiculaire à (*FG*) donc (*CH*) est aussi la hauteur issue de *C* dans le triangle *CFG*.

$\mathcal{A}_{CDE} = \dfrac{CH \times DE}{2}$ et $\mathcal{A}_{CFG} = \dfrac{CH \times FG}{2}$

Or $DE = FG$ donc les deux aires sont égales.

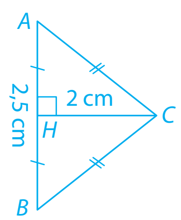
Le sculpteur a raison.

2. Le sculpteur souhaite par ailleurs que certaines de ces plaques possèdent un axe de symétrie. Comment peut-il s'y prendre pour réaliser ces plaques ? Justifier.

Il suffit de faire une plaque en forme de triangle isocèle. Si *CDE* est isocèle en *C*, alors $CD = CE$, donc *C* appartient à la médiatrice de [*DE*] qui est ainsi un axe de symétrie du triangle.

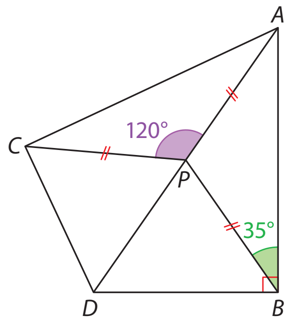
3. Le sculpteur souhaite construire une plaque *ABC* isocèle en *C* telle que $AB = 2{,}5$ m et dont la hauteur issue de *C* mesure 2 cm.

Construire la plaque en prenant pour échelle 1 cm pour 1 m.



32 Quadrilatère
Modéliser, Raisonner, Calculer, Communiquer

On considère la figure ci-dessous, où les points *D*, *P* et *A* sont alignés.



1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DPC}$.

$\widehat{DPC} = 180° - 120° = 60°$

2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BPA}$.

Le triangle *BPA* est isocèle en *P* donc ses angles à la base sont égaux. Ainsi, $\widehat{BAP} = 35°$. Comme la somme des angles du triangle est égale à 180°, on a :

$\widehat{BPA} = 180° - (35° + 35°) = 110°$.

3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DPB}$.

$\widehat{DPB} = 180° - 110° = 70°$.

4. Démontrer que le triangle *DPB* est isocèle en *P*.

$\widehat{DBP} = 90° - 35° = 55°$

Comme la somme des angles du triangle *DBP* est égale à 180°, on a :

$\widehat{BDP} = 180° - (70° + 55°) = 55°$

Les angles à la base du triangle *DPB* sont de même mesure, donc le triangle *DPB* est isocèle en *P*.

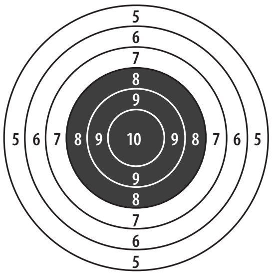
5. Les points *A*, *B*, *C* et *D* appartiennent-ils tous à un même cercle ? Si oui, lequel ?

Comme $PA = PB = PC = PD$, les quatre points *A*, *B*, *C* et *D* appartiennent au cercle de centre *P* et de rayon *PA*.

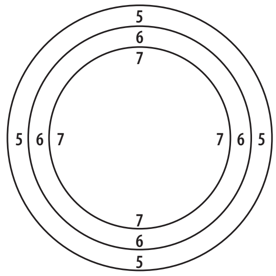
Tâche complexe

33 Le dirigeant d'un club de tir à l'arc a commandé de nouvelles cibles pour le prochain tournoi. Il constate malheureusement que les cibles livrées ont été mal imprimées et qu'il manque des cercles.
L'écart entre les rayons de deux cercles successifs doit toujours être le même.

Doc 1 **Cibles commandées et attendues**

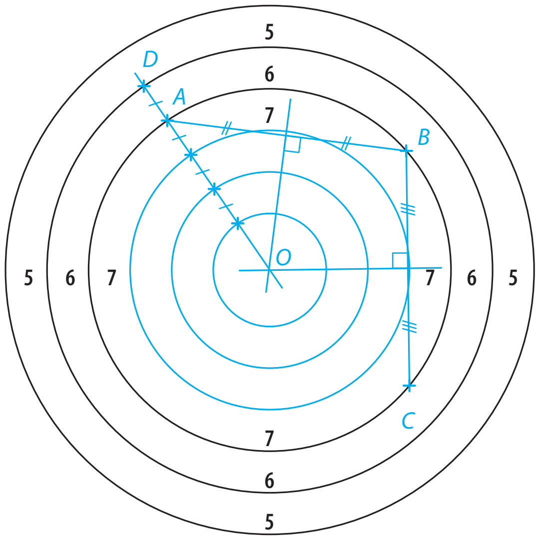


Doc 2 **Cibles livrées**



◗ Sur le schéma ci-contre, construire les cercles manquants à la cible. Expliquer la démarche.

On place trois points *A*, *B* et *C* sur le plus petit cercle noir tracé.
On construit les médiatrices des segments [*AB*] et [*BC*]. Le point d'intersection des médiatrices est le centre *O* de tous les cercles.
On trace la droite (*OA*). Elle coupe le cercle noir suivant en *D*.
À partir de *A*, sur le segment [*OA*], on reporte trois fois la longueur *AD* et on trace chaque cercle correspondant aux numéros 8, 9 et 10.



Le jeu

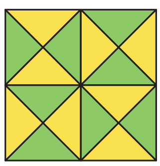
Le triangle de la mort

Par groupe de trois ou quatre.
Un joueur lance trois dés. S'il peut construire un triangle dont les côtés mesurent les trois nombres obtenus, il reste dans le jeu, sinon il est éliminé.
On passe ensuite au joueur suivant.
Le jeu continue jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul joueur, qui est alors le gagnant.

Le défi

Triangles en pagaille

Combien y a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?



$4 + 4 + 4 + 4 \times 4 + 4 \times 4 = 44$