MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 12

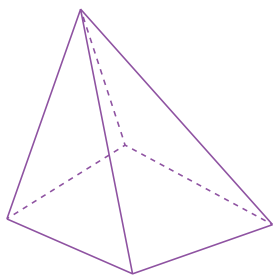
Chapitre 12

Solides de l'espace

1 Reconnaitre des solides

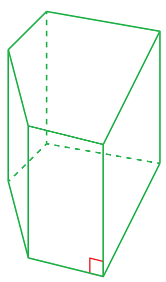
- Un **polyèdre** est un solide dont les faces sont des polygones.
- Les côtés de ces polygones sont appelés **arêtes**, leurs extrémités sont des points appelés **sommets**.

1 Donner le nombre et la nature des faces, ainsi que le nombre de sommets de la pyramide ci-dessous.



La pyramide possède 5 faces (4 triangles et 1 quadrilatère) et 5 sommets.

2 Préciser si le solide ci-dessous est un polyèdre. Si oui, le nommer et donner le nombre et la nature de ses faces ainsi que le nombre de ses sommets.



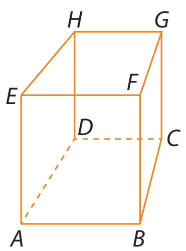
Ce solide est un prisme droit qui est un polyèdre. Il a 7 faces (2 pentagones et 5 rectangles) et 10 sommets.

3 Préciser si le solide ci-contre est un polyèdre.

Le solide est une sphère donc n'est pas un polyèdre.

- La représentation d'un solide en **perspective cavalière** respecte les règles suivantes.
  - Les faces avant et arrière sont représentées en vraie grandeur.
  - Les arêtes parallèles et de même longueur sont représentées par des segments parallèles et de même longueur.
  - Les arêtes cachées sont représentées en pointillés.
  - Les arêtes obliques sont représentées par des segments moins longs qu'en réalité.

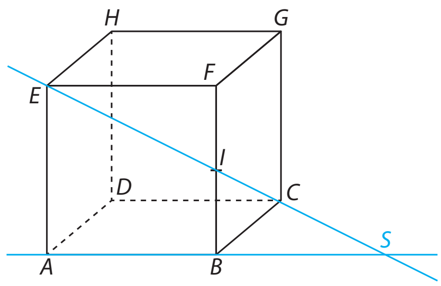
4 Rémi affirme avoir dessiné un cube *ABCDEFGH* ci-dessous en perspective cavalière.
Trouver au moins deux erreurs commises par Rémi.



Les segments [*EH*] et [*FG*] ne sont pas parallèles.

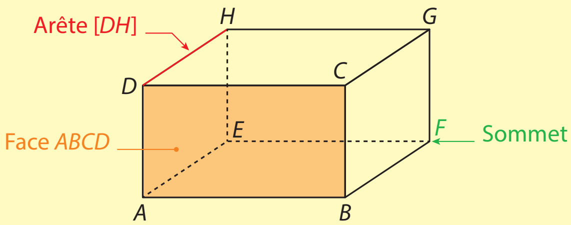
L'arête [*HD*] n'est pas en pointillés.

5 MODE EXPERT Une boite électrique cubique est posée sur le sol sur sa face *ABCD*. *I* est un point de l'arête [*FB*].
Un fil électrique rectiligne passe par les points *E* et *I* puis pénètre dans le sol en un point *S*.
Construire sur le schéma ci-dessous la position exacte du point *S*.

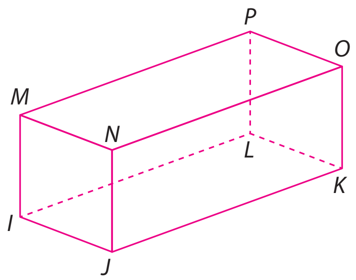


2 Représenter un parallélépipède rectangle

Un **parallélépipède rectangle**, appelé aussi pavé droit, est un solide qui a 6 faces rectangulaires, 8 sommets et 12 arêtes.



6 On a représenté ci-dessous un parallélépipède rectangle en perspective cavalière.



1. Donner la nature des figures suivantes.

MNJI : rectangle .... *LKO* : triangle rectangle

NJKO : rectangle .... *MNOP* : rectangle

2. Nommer toutes les faces ayant le sommet *L* en commun.

LKOP ; *LPMI* ; *LKJI* ....

3. Nommer toutes les faces ayant l'arête [*IL*] en commun.

ILPM ; *ILKJ* ....

4. Nommer toutes les arêtes parallèles à l'arête [*MP*].

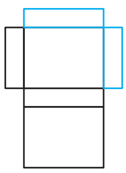
[*NO*] ; [*IL*] ; [*JK*] ....

5. Nommer toutes les arêtes perpendiculaires à l'arête [*PO*].

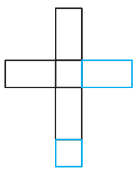
[*MP*] ; [*NO*] ; [*PL*] ; [*OK*] ....

7 Compléter les patrons de parallélépipèdes rectangles suivants.

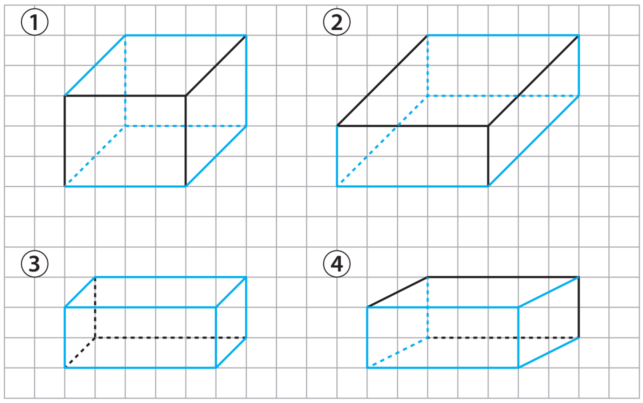
a.



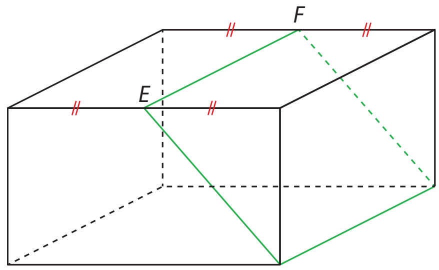
b.



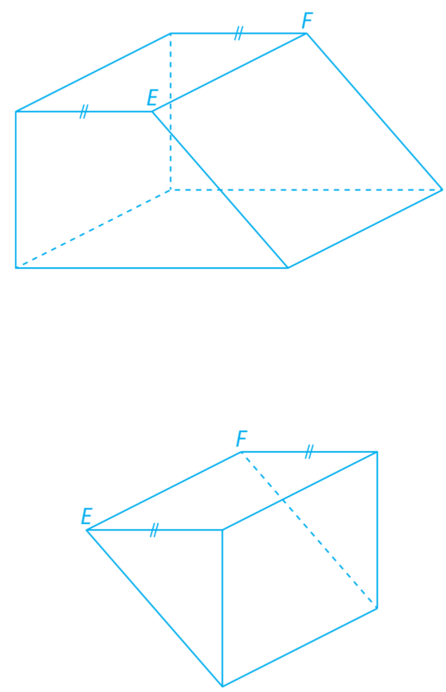
8 Compléter les représentations en perspective cavalière des parallélépipèdes rectangles suivants.



9 MODE EXPERT On découpe le parallélépipède suivant le long des segments verts.



Construire en perspective cavalière les deux solides obtenus.



3 Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle

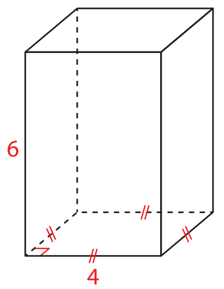
- Le **volume $\mathcal{V}$ d'un prisme droit** est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

- Le **volume $\mathcal{V}$ d'un parallélépipède rectangle** de longueur L, de largeur ℓ et de hauteur h est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = L \times \ell \times h$$

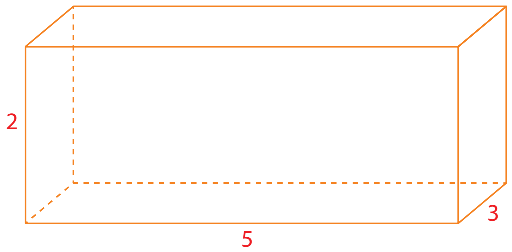
10 Calculer le volume du pavé droit ci-dessous dont la base est un carré. Les longueurs sont exprimées en cm.



$\mathcal{V}$ = aire de la base × hauteur

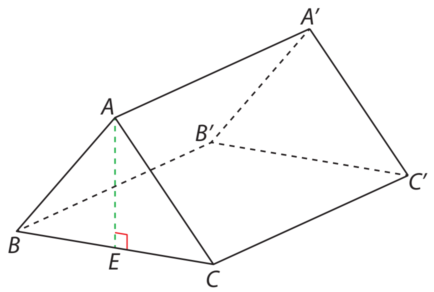
$\mathcal{V} = 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^3$

11 Calculer le volume du parallélépipède ci-dessous. Les longueurs sont exprimées en cm.



$\mathcal{V} = L \times l \times h = 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^3$

12 Calculer le volume du prisme droit ci-dessous.

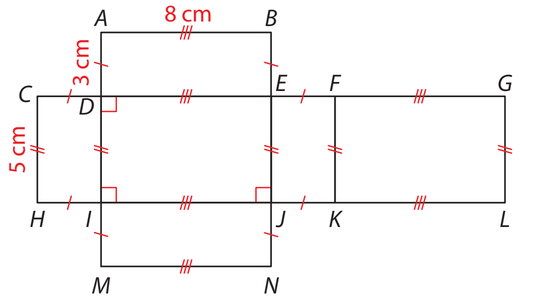


$BC = 3{,}5$ cm ; $AE = 3$ cm ; $CC' = 5$ cm

$\mathcal{V}$ = aire de la base × hauteur

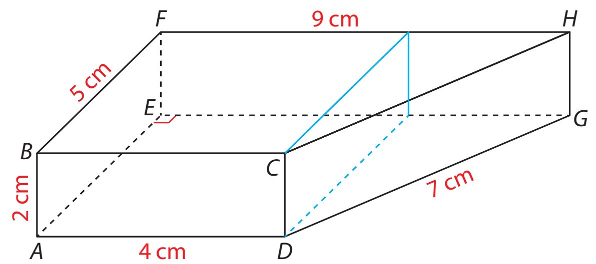
$\mathcal{V} = \dfrac{3{,}5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} \times 5 \text{ cm} = 26{,}25 \text{ cm}^3$

13 Calculer le volume du parallélépipède suivant.



$\mathcal{V} = L \times \ell \times h = 8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^3$

14 Calculer le volume du prisme droit ci-dessous dont la base est un trapèze rectangle en E. Les longueurs sont exprimées en cm.



On décompose le prisme en un parallélépipède et un prisme droit dont la base est un triangle rectangle.

Le volume du parallélépipède est :

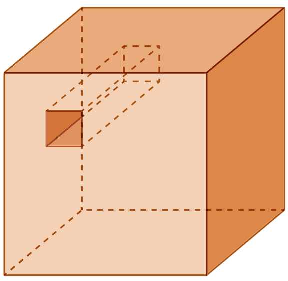
$4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^3$

Le volume du prisme est $\mathcal{V}$ = aire de la base × hauteur

$\dfrac{5 \times (9 - 4)}{2} \times 2 = 25$, donc $\mathcal{V} = 25 \text{ cm}^3$.

Le volume total est donc 65 cm^3.

15 MODE EXPERT Un cube en bois d'arête 1,5 m est percé de part en part par un trou parallélépipèdique formant un carré de 14 cm de côté sur les faces avant et arrière. Quel est le volume du solide en bois ainsi obtenu ?



$\mathcal{V}_{\text{cube}} = 1{,}5 \text{ m} \times 1{,}5 \text{ m} \times 1{,}5 \text{ m} = 3{,}375 \text{ m}^3$

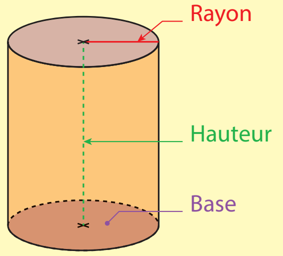
$\mathcal{V}_{\text{trou}} = 0{,}14 \text{ m} \times 0{,}14 \text{ m} \times 1{,}5 \text{ m} = 0{,}029\,4 \text{ m}^3$

Le volume du solide restant est :

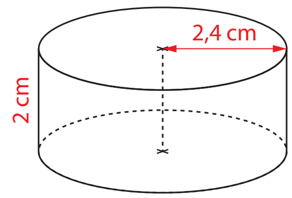
$\mathcal{V}_{\text{cube}} - \mathcal{V}_{\text{trou}} = 3{,}345\,6 \text{ m}^3$

4 Représenter un cylindre de révolution

- Un **cylindre de révolution** est un solide obtenu en faisant tourner un rectangle autour de l'un de ses côtés.
- Les **bases** d'un cylindre sont deux disques de même rayon.
- La **hauteur** d'un cylindre est la longueur du segment qui a pour extrémités les centres des bases.



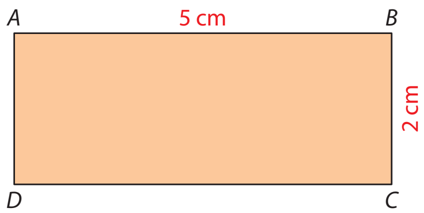
16 Quelle est la hauteur et le rayon de la base du cylindre ci-contre ?



La hauteur est 2 cm.

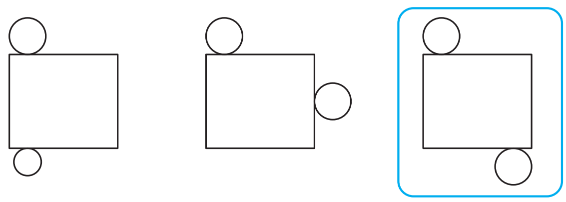
Le rayon de la base est 2,4 cm.

17 Qu'obtient-on si on fait tourner le rectangle *ABCD* autour de [*AB*] ? Entourer la ou les bonnes réponses.

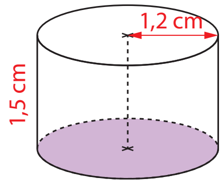


- un cylindre de révolution de 5 cm de diamètre et de 2 cm de hauteur.
- un cylindre de révolution de 2 cm de rayon et de 5 cm de hauteur.
- un cylindre de révolution de 4 cm de rayon et de 5 cm de hauteur.

18 Parmi les figures suivantes, entourer celle ou celles qui représentent un patron de cylindre de révolution.

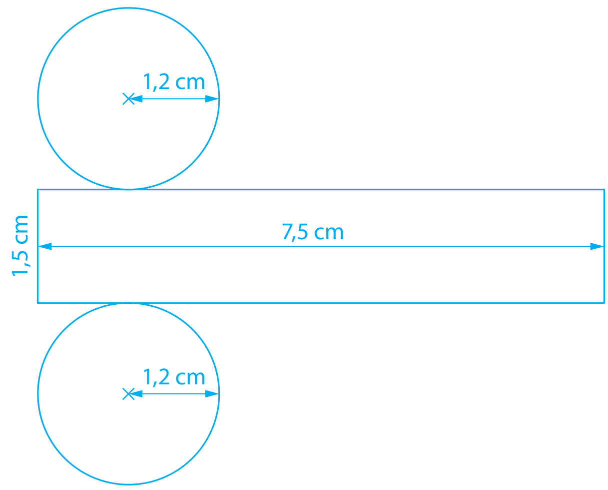


19 Construire un patron du cylindre de révolution ci-dessous.

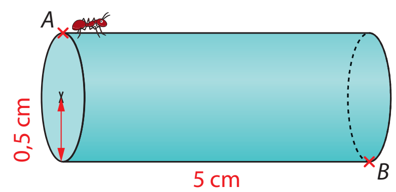


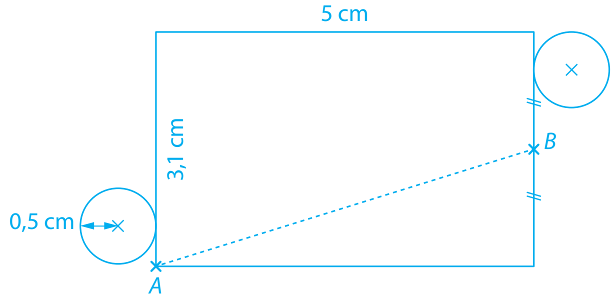
Le périmètre du cercle de la base est :

$2 \times \pi \times 1{,}2$ cm $\approx 7{,}5$ cm



20 MODE EXPERT Une fourmi part du point *A* sur le cylindre de révolution ci-dessous et se dirige vers le point *B*. Elle cherche le chemin le plus court entre les deux points. Déterminer la longueur de ce chemin en le mesurant sur un patron.





En mesurant, on trouve $AB \approx 5{,}2$ cm.

5 Calculer le volume d'un cylindre de révolution

Le **volume $\mathcal{V}$ d'un cylindre de révolution** de rayon r et de hauteur h est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\mathcal{V} = \pi \times r \times r \times h = \pi \times r^2 \times h$$

21 Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée au cm³ du volume d'un cylindre de révolution dont le disque de base a pour rayon 3 cm et de hauteur 6 cm.

$\mathcal{V} = \pi \times 3^2 \times 6\ \text{cm}^3 = 54\pi\ \text{cm}^3 \approx 170\ \text{cm}^3$

22 Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée au cm³ du volume d'un cylindre de révolution dont le disque de base a pour diamètre 6 cm et de hauteur 8 cm.

$\mathcal{V} = \pi \times 3^2 \times 8\ \text{cm}^3 = 72\pi\ \text{cm}^3 \approx 226\ \text{cm}^3$

23 Une tasse à café a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur 4 cm et de base un disque de diamètre 3,5 cm.
Quel est son volume ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au cm³.

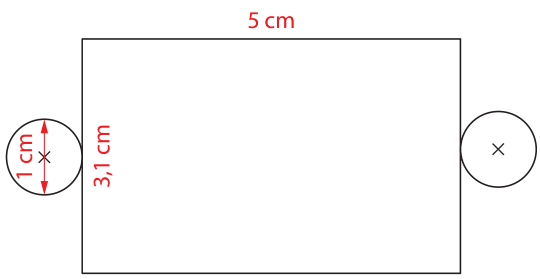
$\mathcal{V} = \pi \times 1{,}75^2 \times 4\ \text{cm}^3 = 12{,}25\pi\ \text{cm}^3 \approx 38\ \text{cm}^3$

24 Un cylindre de révolution de rayon 10 cm a pour volume 800π cm³. Quelle est sa hauteur ?

$\mathcal{V} = \pi \times 100 \times 8\ \text{cm}^3 = \pi \times 10^2 \times 8\ \text{cm}^3$

donc la hauteur est 8 cm.

25 Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée au cm³ du volume d'un cylindre de révolution dont le patron est dessiné ci-dessous.



$\mathcal{V} = \pi \times 0{,}5^2 \times 5\ \text{cm}^3 = 1{,}25\pi\ \text{cm}^3 \approx 4\ \text{cm}^3$

26 On fait tourner un carré de 2,5 cm de côté autour de l'un de ses côtés.
Quel est le volume du cylindre de révolution ainsi obtenu ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au cm³.

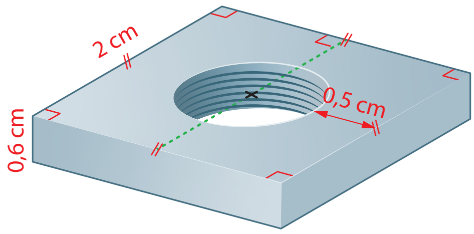
$\mathcal{V} = \pi \times 2{,}5^2 \times 2{,}5\ \text{cm}^3 = 15{,}625\pi\ \text{cm}^3$

$\mathcal{V} \approx 49\ \text{cm}^3$

27 Un oléoduc qui transporte du pétrole a la forme d'un cylindre de révolution de diamètre 70 cm. Une portion de cet oléoduc passe en ligne droite dans un village sur une longueur de 240 m.
Quel est le volume de cette portion d'oléoduc ?
Donner la valeur approchée au m³.

$\mathcal{V} = \pi \times 0{,}35^2 \times 240\ \text{m}^3 = 29{,}4\pi\ \text{m}^3 \approx 92\ \text{m}^3$

28 MODE EXPERT Un écrou a la forme ci-dessous. Le trou est centré dans l'écrou.



Calculer le volume de métal nécessaire pour fabriquer un écrou. Donner le résultat arrondi au centième de cm³.

On calcule le rayon du trou cylindrique :

$R = (2\ \text{cm} - 0{,}5\ \text{cm} \times 2) \div 2 = 0{,}5\ \text{cm}.$

Le volume du trou cylindrique est donc :

$\mathcal{V} = \pi \times 0{,}5^2 \times 0{,}6\ \text{cm}^3 \approx 0{,}47\ \text{cm}^3.$

Le volume de métal nécessaire est donc :

$2\ \text{cm} \times 2\ \text{cm} \times 0{,}6\ \text{cm} - 0{,}47\ \text{cm}^3 \approx 1{,}93\ \text{cm}^3.$

6 Convertir des unités de volume

Pour **convertir des unités de volume**, on effectue des multiplications par 1 000 ou des divisions par 1 000.

$$1\ \text{dm}^3 \xrightarrow{\times 1\,000} 1\,000\ \text{cm}^3$$

1 dm³ = 1 000 cm³

1 cm³ = 0,001 dm³

$$1\ \text{cm}^3 \xrightarrow{\div 1\,000} 0{,}001\ \text{dm}^3$$

29 Compléter les égalités suivantes.

a. $45\ \text{dm}^3 = 45 \times$ 1 000 $\text{cm}^3 =$ 45 000 cm^3

b. $3{,}2\ \text{m}^3 = 3{,}2 \times$ 1 000 $\text{dm}^3 =$ 3 200 dm^3

c. $7\ \text{dm}^3 = 7 \div$ 1 000 $\text{m}^3 =$ 0,007 m^3

d. $54{,}7\ \text{cm}^3 = 54{,}7 \div$ 1 000 $\text{dm}^3 =$ 0,054 7 dm^3

30 Compléter les égalités suivantes.

a. $673\ \text{dm}^3 =$ 0,673 m^3

b. $61{,}7\ \text{cm}^3 =$ 0,061 7 dm^3

c. $3{,}8\ \text{m}^3 =$ 3 800 000 cm^3

d. $1\,600\ \text{cm}^3 =$ 0,001 6 m^3

e. $0{,}13\ \text{m}^3 =$ 130 dm^3

f. $0{,}013\,8\ \text{dm}^3 =$ 13,8 cm^3

Le **litre**, noté **L**, est une unité de contenance.
1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³
1 L = 10 dL = 100 cL = 1 000 mL

31 Compléter les égalités suivantes.

a. $1\ \text{m}^3 =$ 1 000 L = 10 000 dL = 100 000 cL

b. $1\ \text{cm}^3 =$ 0,001 $\text{dm}^3 =$ 0,001 L = 1 mL

c. $0{,}043\ \text{dm}^3 =$ 0,043 L = 4,3 cL

d. $800\ \text{cm}^3 =$ 80 cL = 0,8 L

32 Dans chacun des cas, donner une unité adaptée pour exprimer le volume (ou la contenance) :

a. d'une piscine de jardin : m³

b. d'une boite d'allumettes : cm³

c. d'une grande bouteille d'eau : L

d. d'une dose de médicament : mL

33 Une piscine olympique a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur 50 m, de largeur 25 m et de profondeur 3 m.
Combien de litres d'eau sont nécessaires pour remplir une piscine olympique à ras bord ?

$\mathcal{V} = 50\ \text{m} \times 25\ \text{m} \times 3\ \text{m} = 3\,750\ \text{m}^3$

$\mathcal{V} = 3\,750\,000\ \text{L}$

34 Une tasse à café peut être assimilée à un cylindre de diamètre 4 cm et de hauteur 5 cm.
Quelle est la contenance d'une telle tasse à café, exprimée en cL ?

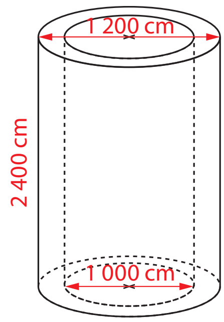
$\mathcal{V} = \pi \times 2^2 \times 5\ \text{cm}^3 \approx 62{,}8\ \text{cm}^3$

$\mathcal{V} \approx 62{,}8\ \text{mL} \approx 6{,}28\ \text{cL}$

35 Le corps d'une seringue, sans l'aiguille, peut se modéliser par un cylindre de diamètre 8 mm et de hauteur 5 cm.
Quel est, en mL, le volume d'une telle seringue ?

$\mathcal{V} = \pi \times 0{,}4^2 \times 5\ \text{cm}^3 \approx 2{,}5\ \text{cm}^3 \approx 2{,}5\ \text{mL}$

36 MODE EXPERT Un château d'eau a la forme d'un cylindre dont le centre a été creusé pour stocker l'eau. Le trou central est également cylindrique. Les dimensions du château d'eau sont données sur le schéma ci-contre.



1. Quel est le nombre maximal de litres d'eau que ce château d'eau peut contenir ? Arrondir à l'unité.

$\mathcal{V}_1 = \pi \times 500^2 \times 2\,400\ \text{cm}^3$

$\mathcal{V}_1 = 600\,000\,000\pi\ \text{cm}^3 = 600\,000\pi\ \text{dm}^3$

$\mathcal{V}_1 \approx 1\,884\,956\ \text{dm}^3 \approx 1\,884\,956\ \text{L}$

2. Quel volume de ciment en m³ faut-il pour fabriquer le château d'eau ? Donner la valeur exacte.

Le volume du grand cylindre est :

$\mathcal{V}_2 = \pi \times 600^2 \times 2\,400\ \text{cm}^3$

$\mathcal{V}_2 = 864\,000\,000\pi\ \text{cm}^3 = 864\pi\ \text{m}^3$

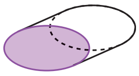
Or $\mathcal{V}_1 = 600\,000\,000\pi\ \text{cm}^3 = 600\pi\ \text{m}^3$

Le volume de béton en m³ est donc :

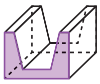
$\mathcal{V} = 864\pi\ \text{m}^3 - 600\pi\ \text{m}^3 = 264\pi\ \text{m}^3$.

Automatismes

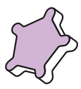
37 Parcours ceinture jaune

1. Le solide suivant est-il un polyèdre ? 
   Non
2. Un parallélépipède rectangle a-t-il autant de sommets que de faces ? Non
3. Quel est le volume du parallélépipède rectangle de longueur 3 cm, de largeur 4 cm et de hauteur 5 cm ? 60 cm^3
4. Un cylindre de révolution peut-il avoir une hauteur égale à son diamètre ? Oui
5. Quelle est la valeur exacte du volume d'un cylindre de révolution de rayon 1 cm et de hauteur 1 cm ? π cm^3
6. 2 L = 2 dm^3

38 Parcours ceinture verte

1. Le solide suivant est-il un polyèdre ? 
   Oui
2. Un parallélépipède rectangle a-t-il autant d'arêtes que de sommets ? Non
3. Quel est le volume du parallélépipède rectangle de longueur 0,01 cm, de largeur 5 cm et de hauteur 10 cm ? 0,5 cm^3
4. Peut-on fabriquer un cylindre de révolution à partir d'un carré ? Oui
5. Quelle est la valeur exacte du volume d'un cylindre de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 5 cm ? 125π cm^3
6. 2 000 cm^3 = 2 L

39 Parcours ceinture noire

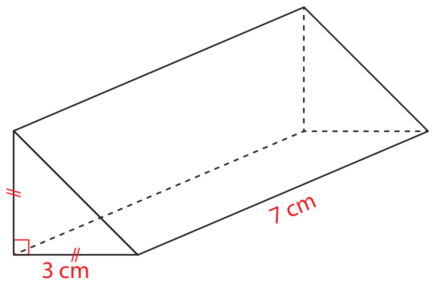
1. Le solide suivant est-il un polyèdre ? 
   Non
2. Quel est le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur x cm, de largeur 3 cm et de hauteur 4 cm ? $12x$ cm^3
3. Le volume d'un cylindre de hauteur 3 cm est 300π cm^3. Quel est son rayon ? 10 cm
4. 80 cL = 800 cm^3
5. 4 cL = 0,000 04 m^3

Problèmes

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

40 La barre de chocolat
Calculer

Un emballage de barre au chocolat a la forme d'un prisme droit dont la base est un triangle rectangle. Il est représenté ci-dessous en perspective cavalière.



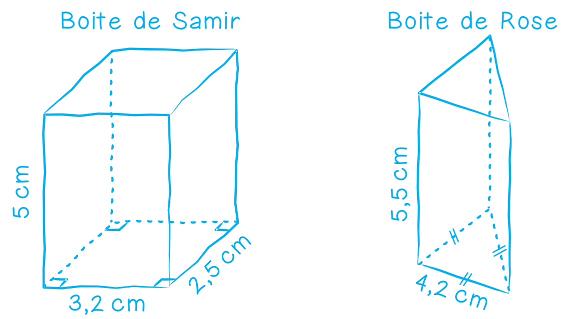
- Calculer le volume de cet emballage en cm³.

$\mathcal{V} = \dfrac{3\text{ cm} \times 3\text{ cm}}{2} \times 7\text{ cm} = 31{,}5\text{ cm}^3$

41 Les boites
Calculer, Représenter, Modéliser

Samir et Rose doivent réaliser des boites en forme de prismes droits. La boite de Samir doit avoir une base en forme de rectangle dont les côtés mesurent 2,5 cm et 3,2 cm et la hauteur 5 cm. La boite de Rose doit avoir une base en forme de triangle équilatéral de 4,2 cm de côté et une hauteur de 5,5 cm.

1. Représenter à main levée et en perspective cavalière chaque boite posée sur l'une de ses bases.



2. Samir dit : « La somme des longueurs de toutes les arêtes de ma boite est plus grande que celle de ta boite ». A-t-il raison ?

Samir : $3{,}2\text{ cm} \times 4 + 2{,}5\text{ cm} \times 4 + 5\text{ cm} \times 4 = 42{,}8\text{ cm}$

Rose : $4{,}2\text{ cm} \times 6 + 5{,}5\text{ cm} \times 3 = 41{,}7\text{ cm}$

Samir a raison.

3. Rose mesure la hauteur de la base de son prisme et trouve 3,6 cm. Elle dit à Samir : « Le volume de mon prisme est plus grand que le tien ». A-t-elle raison ?

$\mathcal{V}_{\text{samir}} = 3{,}2\text{ cm} \times 2{,}5\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 40\text{ cm}^3$

$\mathcal{V}_{\text{rose}} = \dfrac{4{,}2\text{ cm} \times 3{,}6\text{ cm}}{2} \times 5{,}5\text{ cm} = 41{,}58\text{ cm}^3$

Rose a raison.

42 La pyramide de Khéops
Calculer, Représenter

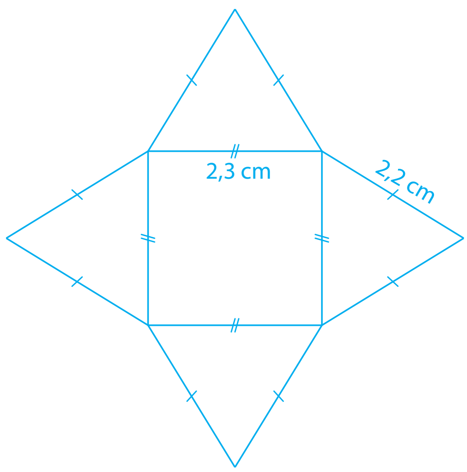
La pyramide de Khéops a une base carrée de 230 m de côté et avait une hauteur initiale de 146 m.

1. Un touriste fait le tour de la pyramide. Combien de faces peut-il observer ? 4 faces.

2. Combien de sommets, y compris ceux qui sont sur le sol, possède la pyramide de Khéops ? 5 sommets.

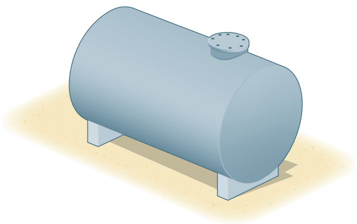
3. Les arêtes qui joignent le sommet de la pyramide ont toutes une longueur d'environ 220 m. En prenant une échelle de 1 cm pour 100 m, dessiner le patron de la pyramide de Khéops.

100 m sont représentés par 1 cm, donc 230 m sont représentés par 2,3 cm et 220 m sont représentés par 2,2 cm.



Problèmes

43 La cuve de fioul
Calculer, Raisonner



Madame Rossignol possède une cuve de fioul pour son chauffage en forme de cylindre de 1,4 m de diamètre et de 3,2 m de longueur.

Les trois quarts de la contenance de la cuve de Fioul de Mme Rossignol sont vides.

1. Combien reste-t-il de litres de fioul dans la cuve de Mme Rossignol ? Arrondir au litre.

$\mathcal{V} = \pi \times 0{,}7^2 \times 3{,}2\ \text{m}^3 \approx 4{,}926\ \text{m}^3 \approx 4\,926\ \text{L}$

Comme la cuve est vide aux trois quarts, il reste un quart de fioul dans la cuve soit environ :

$\frac{1}{4} \times 4\,926\ \text{L} = 1\,231{,}5\ \text{L}$

2. Le vendeur de fioul lui propose le fioul à 70 centimes le litre. Combien Mme Rossignol doit-elle payer pour remplir sa cuve de fioul ?

Mme Rossignol doit acheter 5 000L – 1 231,5 L = 3 768,5 L.

Elle va donc payer 3 768,5 × 0,7 € = 2 637,95 €.

44 Le thermos et le verre
Raisonner, Calculer

Un saladier en forme de pavé droit mesure 9 cm de large, 7 cm de long et 10 cm de haut. Le saladier est rempli de jus de fruits. On verse le contenu du saladier dans un thermos cylindrique de hauteur 12 cm et de diamètre 8 cm.

▸ Le thermos va-t-il déborder ? (On ne tiendra pas compte de l'épaisseur des parois.)

$\mathcal{V}_{\text{saladier}} = 7\ \text{cm} \times 9\ \text{cm} \times 10\ \text{cm} = 630\ \text{cm}^3$

$\mathcal{V}_{\text{thermos}} = \pi \times 4^2 \times 12\ \text{cm}^3 \approx 603\ \text{cm}^3$.

Or $630 > 603$, donc le thermos va déborder.

45 Le tuyau d'eau
Modéliser, Calculer

Joseph a un tuyau d'eau dans son jardin branché sur le robinet d'eau froide. Ce tuyau lui sert de douche extérieure. Le tuyau est assimilé à un cylindre de 18 mm de diamètre et de 15 m de longueur. En été, le tuyau reste au soleil et chauffe l'eau qui reste à l'intérieur.

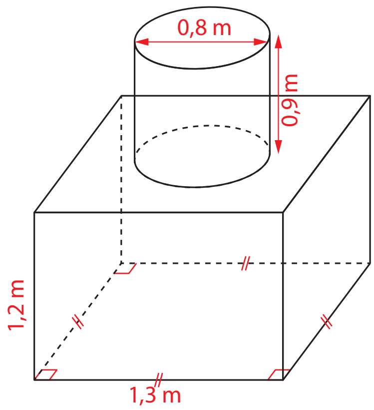
▸ De combien de litres d'eau chaude contenus dans le tuyau Joseph dispose-t-il avant que l'eau froide n'arrive ? Arrondir au dixième de litre.

On calcule le volume du cylindre de diamètre 18 mm et de hauteur 15 m.

$\mathcal{V} = \pi \times 0{,}009^2 \times 15\ \text{m}^3 \approx 0{,}0038\ \text{m}^3 \approx 3{,}8\ \text{dm}^3 \approx 3{,}8\ \text{L}$

46 Le récupérateur d'eau de pluie
Calculer, Communiquer, Modéliser

Un récupérateur d'eau de pluie de jardin a la forme d'un parallélépipède rectangle sur lequel est fixé un cylindre.



L'eau rentre par le haut du cylindre.

▸ Quel est le volume d'eau, en litres, obtenu lorsque le récupérateur est plein ? Arrondir la réponse au litre.

On calcule le volume du parallélépipède :

$\mathcal{V}_p = 1{,}3^2 \times 1{,}2\ \text{m}^3 = 2{,}028\ \text{m}^3 = 2\,028\ \text{L}$.

On calcule le volume du cylindre :

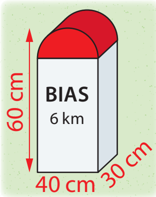
$\mathcal{V}_c = \pi \times 0{,}4^2 \times 0{,}9\ \text{m}^3 \approx 0{,}452\ \text{m}^3 = 452\ \text{L}$.

Le volume total est donc :

2 028 L + 452 L = 2 480 L.

47 La borne kilométrique
Calculer, Raisonner, Modéliser

Une borne kilométrique a la forme ci-contre.



1. Quels sont les deux solides qui constituent cette borne ? Donner leurs dimensions.

La borne est constituée :

• d'un demi-cylindre de diamètre 40 cm (de rayon 20 cm) et de hauteur 30 cm ;

• d'un parallélépipède rectangle de longueur 40 cm, de largeur 30 cm et de hauteur 60 cm – 20 cm = 40 cm.

2. La borne est fabriquée en béton. Quel volume de béton est nécessaire ? Donner la valeur en cm^3 arrondie à l'unité.

$\mathcal{V}_{\text{parallélépipède}} = 40\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 40\text{ cm} = 48\ 000\text{ cm}^3$

$\mathcal{V}_{\text{demi-cylindre}} = \dfrac{1}{2} \times \pi \times 20^2 \times 30\text{ cm}^3 \approx 18\ 850\text{ cm}^3$

Le volume de béton nécessaire est donc :

$48\ 000\text{ cm}^3 + 18\ 850\text{ cm}^3 = 66\ 850\text{ cm}^3$

3. Le service technique de l'entretien des routes doit convertir ce volume en litres pour effectuer la commande de béton. Quel est le volume en litres ?

$\mathcal{V} = 66\ 850\text{ cm}^3 = 66{,}85\text{ dm}^3 = 66{,}85\text{ L}$

48 Le jus de pêche
Calculer, Raisonner, Communiquer

Régis a une bouteille pour y mettre du jus de pêche. La bouteille vide pèse 450 g. La bouteille pleine de jus de pêche pèse 1,6 kg.

▶ Sachant que 1 cm^3 de jus de pêche pèse 1,15 g, quel est le volume en litres de jus de pêche contenu dans la bouteille ?

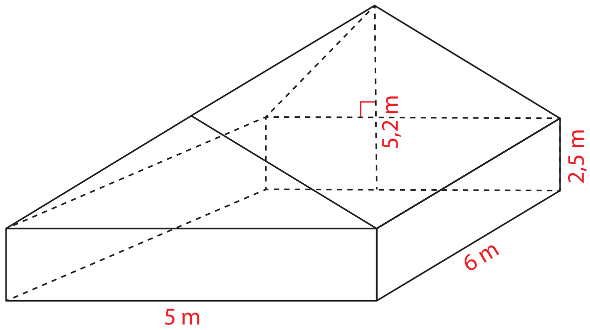
Il y a 1,6 kg – 0,45 kg = 1,15 kg de jus de pêche dans la bouteille.

Comme 1,15 g de jus de pêche a un volume de 1 cm^3, 1 150 g de jus de pêche ont un volume de 1 000 cm^3 soit 1 dm^3 soit 1 L.

Il y a un litre de jus de pêche dans la bouteille.

49 La VMC
Calculer, Raisonner, Modéliser

Sami veut installer dans sa salle à manger un extracteur d'air, appelé VMC (ventilation mécanique contrôlée), pour renouveler régulièrement l'air de la pièce. Il dispose ci-dessous d'une représentation de la salle à manger constituée d'un parallélépipède rectangle et d'un prisme droit à base triangulaire.



▶ Il achète un extracteur d'air qui évacue 1,4 m^3 par heure. En combien de temps l'air contenu dans la pièce aura-t-il été complètement renouvelé ? Donner le résultat en jours et en heures.

On calcule le volume de la pièce.

Volume du parallélépipède :

$5\text{ m} \times 6\text{ m} \times 2{,}5\text{ m} = 75\text{ m}^3$

Volume du prisme droit :

$\dfrac{5\text{ m} \times (5{,}2\text{ m} - 2{,}5\text{ m})}{2} \times 6\text{ m} = 40{,}5\text{ m}^3$

Le volume total de la pièce est donc de :

$75\text{ m}^3 + 40{,}5\text{ m}^3 = 115{,}5\text{ m}^3$

L'extracteur évacue 1,4 m^3 par heure.

$115{,}5 \div 1{,}4 = 82{,}5$

Il faudra 82,5 heures pour que l'air soit renouvelé.

Or 82,5 h = 24 h × 3 + 10,5 h = 3 jours + 10,5 h

Il faudra 3 jours et 10,5 heures pour évacuer entièrement l'air de la pièce.

Problèmes

50 Le rouleau compresseur
Calculer, Raisonner, Communiquer

Un rouleau compresseur, servant à étaler le goudron sur les routes, a la forme d'un cylindre de 1,6 m de diamètre et peut étaler du goudron sur une bande de 2 mètres de large.

1. Lorsque le rouleau compresseur fait un tour complet, quelle surface de goudron étale-t-il ? Arrondir à l'unité près.

Lorsque le rouleau compresseur fait un tour complet, il étale une surface de goudron égale à l'aire du rectangle de son patron.

La longueur de ce rectangle est égale au périmètre de la base du cylindre :

$L = \pi \times 1{,}6\text{ m} \approx 5\text{ m}$

La largeur du rectangle est égale à la hauteur du cylindre soit 2 m.

La surface du goudron étalé aura donc une aire d'environ $5\text{ m} \times 2\text{ m} = 10\text{ m}^2$.

2. Combien de tours doit faire le rouleau compresseur pour étaler 1 km de ligne droite d'une route de largeur de 8 m ?

Surface de goudron à étaler :

$1\,000\text{ m} \times 8\text{ m} = 8\,000\text{ m}^2$

Un tour de rouleau étale 10 m^2, donc il faudra que le rouleau fasse 800 tours.

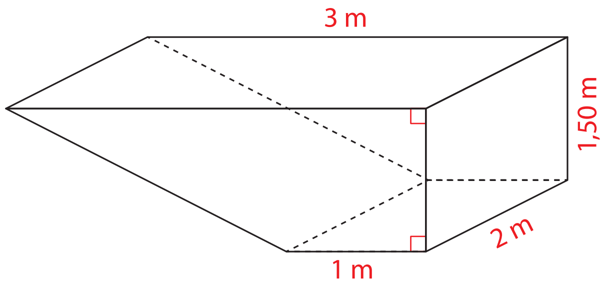
3. Le goudron étalé sur la route a une épaisseur de 5 cm. Il peut être modélisé par un pavé droit. Quel volume de goudron est nécessaire pour réaliser une route droite de 1 km de long et de 8 m de large ?

$\mathcal{V} = 1\,000\text{ m} \times 8\text{ m} \times 0{,}05\text{ m} = 400\text{ m}^3$

Il faudra 400 m^3 de goudron.

51 La piscine coque
Calculer, Raisonner, Communiquer

Nourredine décide de creuser la terre de son jardin pour y installer une piscine coque représentée par le prisme droit ci-dessous.



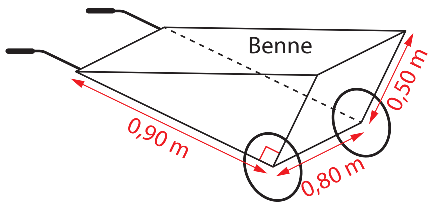
1. Calculer le volume de cette piscine coque.

La piscine est un prisme à base trapézoïdale.

Aire du trapèze : $\dfrac{3\text{ m} + 1\text{ m}}{2} \times 1{,}5\text{ m} = 3\text{ m}^2$.

Volume de la piscine : $3\text{ m}^2 \times 2\text{ m} = 6\text{ m}^3$

2. Pour transporter la terre extraite, il utilise la brouette dont un schéma est présenté ci-dessous.



On suppose qu'il peut mettre dans sa brouette un volume de terre supérieur de 25 % au volume du prisme droit correspondant à la benne de la brouette. Combien doit-il prévoir de voyages ?

Le volume de la benne de la brouette est :

$\dfrac{0{,}9\text{ m} \times 0{,}5\text{ m}}{2} \times 0{,}8\text{ m} = 0{,}18\text{ m}^3$

Il peut mettre 25 % en plus de ce volume sur la brouette : $0{,}18\text{ m}^3 \times \dfrac{25}{100} = 0{,}045\text{ m}^3$. Il peut donc mettre dans la brouette un volume égal à :

$0{,}18\text{ m}^3 + 0{,}045\text{ m}^3 = 0{,}225\text{ m}^3$

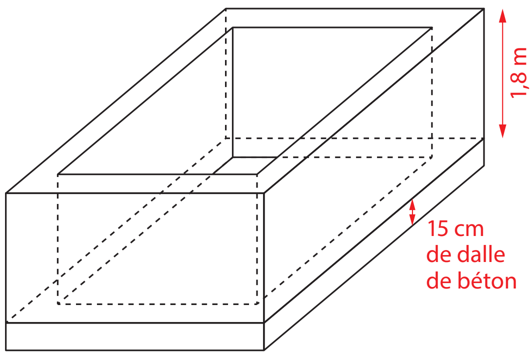
$6 \div 0{,}225 \approx 26{,}7$

Il lui faudra donc prévoir 27 voyages.

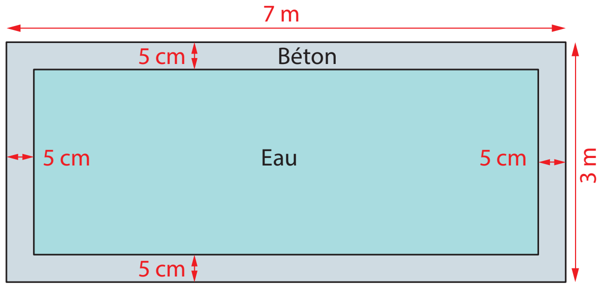
Tâche complexe

52 Fatoumata veut fabriquer sa piscine enterrée en forme de parallélépipède rectangle, avec des parois en béton qui reposent sur une dalle en béton de 15 cm d'épaisseur. Elle a réalisé le plan de la piscine et doit commander les sacs de ciment pour réaliser le béton avec une bétonnière à main.

Doc 1 Plans de la piscine



Vue en perspective



Vue de dessus

Doc 2 La bétonnière

Avec une bétonnière entièrement remplie, on produit 0,5 m^3 de béton et il faut 6 sacs de ciment.

Doc 3 Prix du ciment

Un sac de 35 kg de ciment pour béton coute 9,20 €.

- Calculer le cout du ciment nécessaire à la fabrication du béton de la piscine.

$\mathcal{V}_{\text{extérieur}} = 7\text{ m} \times 3\text{ m} \times 1{,}8\text{ m} = 37{,}8\text{ m}^3$.

$\mathcal{V}_{\text{intérieur}} = (7\text{ m} - 2 \times 0{,}05\text{ m}) \times (3\text{ m} - 2 \times 0{,}05\text{ m}) \times 1{,}8\text{ m} = 36{,}018\text{ m}^3$.

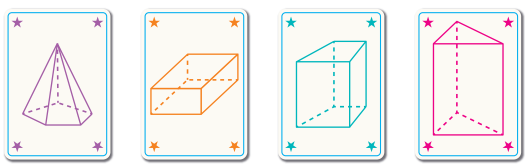
$\mathcal{V}_{\text{murs}} = 37{,}8\text{ m}^3 - 36{,}018\text{ m}^3 = 1{,}782\text{ m}^3$ $\mathcal{V}_{\text{dalle}} = 7\text{ m} \times 3\text{ m} \times 0{,}15\text{ m} = 3{,}15\text{ m}^3$

Le volume total de béton est donc 4,932 m^3. Or $4{,}932 \div 0{,}5 = 9{,}864$. Il faudra utiliser 10 fois la bétonnière, donc $10 \times 6 = 60$ sacs de ciment. Le cout du ciment sera donc $60 \times 9{,}2$ € $= 552$ €.

Le jeu

Le polyèdre

Le jeu se joue à deux. Le premier joueur choisit secrètement une carte et annonce le nombre de sommets du solide, le nombre de faces et si toutes les faces ont ou non un centre de symétrie.
Le deuxième joueur doit deviner le nom du solide. Les rôles sont ensuite inversés, le premier qui se trompe a perdu.

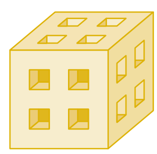


Le défi

La souris géomètre

Une souris à l'esprit très géométrique mange un morceau de gruyère en forme de cube de 5 cm d'arête. Elle creuse des galeries de part en part qui ont la forme de trous carrés de côté 1 cm. Les douze trous ainsi percés sont régulièrement espacés comme indiqué sur la figure.
Quel est le volume de gruyère restant ?

81 cm^3



Problèmes transversaux

ceinture jaune ceinture verte ceinture noire

1 La location de bateau

Chercher, Calculer

Un vacancier loue un canot à moteur pour faire une promenade de 55 km en longeant le bord de mer. Le prix de la location est de 20 euros par heure auquel il doit ajouter le prix de l'essence consommée (1,30 € par litre).

Pour une vitesse V (exprimée en km/h) constante, la consommation C de carburant, par heure, en litres, est donnée par :

$$C = \frac{2}{V} + 0{,}3\,V.$$

1. Le vacancier fait une promenade à une vitesse constante de 20 km/h. La promenade dure 3 heures. Quel prix va-t-il payer ?

Il utilise le bateau 3 heures donc il va payer

$3 \times 20\text{ €} = 60\text{ €}$ pour la location.

Il a consommé en 1 heure :

$C = \frac{2}{20} + 0{,}3 \times 20 = 6{,}1$ L d'essence.

Donc en 3 heures, il a consommé $3 \times 6{,}1\text{ L} = 18{,}3$ L d'essence.

Cela lui a couté $18{,}3 \times 1{,}30\text{ €} = 23{,}79\text{ €}$.

Le total de la location lui coute donc

$60\text{ €} + 23{,}79\text{ €} = 83{,}79\text{ €}$.

2. Le vacancier a loué le canot quatre fois au cours de ses vacances. Il a payé à chaque location les sommes 83,79 €, 85,60 €, 124,50 € et 94,68 €. Quelle a été sa dépense moyenne de location du canot ? Arrondir au centime d'euro.

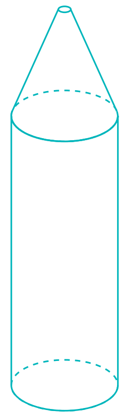
Dépense $= \frac{83{,}79 + 85{,}60 + 124{,}50 + 94{,}68}{4}$

Dépense $= \frac{388{,}57}{4} = 97{,}1425$

Sa dépense moyenne a été de 97,14 €.

2 Tube de dentifrice

Chercher, Calculer



La compagnie Whitedent fabrique des tubes de dentifrice de la forme ci-contre. La pâte est stockée dans le corps du tube qui est en forme de cylindre et qui contient 75 mL de pâte de dentifrice. Le cout de production de la pâte est proportionnel à la quantité produite. La production de 75 mL coute 2,15 €. L'entreprise produit chaque mois 250 000 tubes.

1. Calculer le cout de production mensuelle de pâte de dentifrice.

$250\,000 \times 2{,}15\text{ €} = 537\,500\text{ €}$

Le cout de production mensuelle pour l'entreprise est de 537 500 €.

2. Pour baisser les couts de production, l'entreprise réduit le diamètre de la partie cylindrique de chaque tube à 2,4 cm et la hauteur à 16 cm.

Calculer le volume de pâte de dentifrice contenu dans les nouveaux tubes, arrondi au mL.

$V = 1{,}2\text{ cm} \times 1{,}2\text{ cm} \times \pi \times 16\text{ cm}$

$V \approx 72\text{ cm}^3 \approx 72\text{ mL}$

3. Calculer le cout de production de la pâte d'un nouveau tube de dentifrice.

Pour 75 mL, le cout est de 2,15 €.

Pour 72 mL, le cout est :

$2{,}15\text{ €} \div 75 \times 72 = 2{,}064\text{ €}$.

4. Calculer la réduction mensuelle des couts que va entrainer cette diminution de volume.

$250\,000 \times 2{,}064\text{ €} = 516\,000\text{ €}$

$537\,500\text{ €} - 516\,000\text{ €} = 21\,500\text{ €}$

La réduction mensuelle sera de 21 500 €.

3 Le tunnel
Chercher, calculer

Deux pays séparés par un bras de mer veulent construire un tunnel sous la mer. La distance qui sépare les deux pays est de 23 km. Les pays lancent un appel d'offre à plusieurs compagnies et reçoivent deux propositions.

Proposition 1 : tunnel en forme de cylindre de 12 m de diamètre.

Proposition 2 : tunnel en forme de parallélépipède rectangle dont la base est un carré de 9 m de côté.

1. Calculer le volume de terre à enlever dans les propositions 1 et 2. On arrondira au m³ près.

Le volume du cylindre est :

$\pi \times 6^2 \times 23\,000 \approx 2\,601\,239$

Avec la proposition 1, il faut enlever environ 2 601 239 m³ de terre.

Le volume du parallélépipède est :

$9^2 \times 23\,000 = 1\,863\,000$

Avec la proposition 2, il faut enlever 1 863 000 m³ de terre.

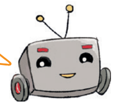
2. Les deux pays envisagent d'opter pour la proposition 1 pour des raisons de solidité de la structure. Mais ils souhaitent déterminer la mesure du rayon de la base du cylindre pour que le volume de terre enlevée soit environ égal au volume de la proposition 2.

Pour cela, ils ont complété la feuille de tableur suivante :

	A	B
1	Rayon de la base (en m)	Volume pour la proposition 1 (en m³)
2	1	72256,63103
3	2	289026,5241
4	3	650309,6793
5	4	1156106,097
6	4	1156106,097
7	6	2601238,717
8	7	3540574,921
9	8	4624424,386
10	9	5852787,114

Quelle formule a été écrite puis recopiée vers les bas en cellule B2 pour calculer les volumes de la colonne B ?

Sur le tableur, le nombre π s'écrit PI().



=PI()*A2^2*23000

ou =PI()*A2*A2*23000

3. Pour quelle valeur du diamètre de la base le volume s'approche-t-il le plus de celui de la proposition 2 ?

Dans la feuille de tableur, le volume le plus proche de 1 863 000 m³ correspond à un rayon de 5 m.

Le diamètre de base qui s'approche le plus de la proposition 2 a donc une valeur de 10 m.

4. Les deux pays s'engagent donc à faire un tunnel comme indiqué dans la question précédente. L'entreprise utilise un extracteur de terre qui extrait 2 000 m³ de terre par jour. Combien de jours faudra-t-il pour enlever la totalité de la terre pour creuser le tunnel ? Arrondir au jour près.

Le volume de terre à enlever est le volume du cylindre ayant pour rayon de base 5 m, soit environ 1 806 416 m³.

$1\,806\,416 \div 2\,000 \approx 903{,}2$

Il faudra environ 904 jours.

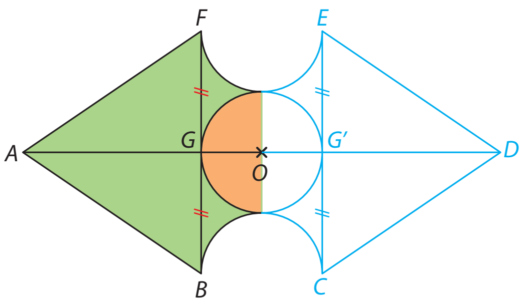
Problèmes

4 Le cerf-volant
Représenter, Calculer

Éloi veut fabriquer un cerf-volant.

L'armature du cerf-volant est constituée d'une tige [AD] de longueur 1,6 m et de deux tiges [BF] et [CE] perpendiculaires à [AD] de longueur 80 cm chacune. La toile du cerf-volant a la forme de deux triangles séparés par un rectangle BCEF dans lequel deux demi-disques de diamètre [FE] et [BC] ont été découpés. Le disque de centre O est quant à lui teinté en orange sur la toile verte. Les diamètres des deux demi-disques et celui du disque de centre O sont égaux à 40 cm. Le cerf-volant est symétrique par rapport à O.

1. Compléter le plan du cerf-volant commencé ci-dessous.



2. Calculer l'aire du triangle ABF. Donner le résultat en m².

$AG = AO - OG = 0{,}8\text{ m} - 0{,}2\text{ m} = 0{,}6\text{ m}$

$\mathcal{A}_{ABF} = 0{,}6\text{ m} \times \dfrac{0{,}8\text{ m}}{2} = 0{,}24\text{m}^2$

3. Donner sans calcul l'aire du triangle CDE. Justifier.

La symétrie centrale conserve les aires donc

$\mathcal{A}_{CDE} = \mathcal{A}_{ABF} = 0{,}24\text{ m}^2$.

4. Calculer l'aire totale de la toile du cerf-volant. On arrondira au dm².

On calcule l'aire du rectangle :

$BC \times BF = 0{,}4\text{ m} \times 0{,}8\text{ m} = 0{,}32\text{ m}^2$

On enlève l'aire des deux demi-cercles soit l'aire du cercle de diamètre $EF = 0{,}4$ m.

$0{,}32\text{ m}^2 - \pi \times 0{,}2\text{ m} \times 0{,}2\text{ m} \approx 0{,}19\text{ m}^2$

On ajoute l'aire des deux triangles :

$2 \times 0{,}24\text{ m}^2 + 0{,}19\text{ m}^2 = 0{,}67\text{ m}^2$

L'aire de la toile du cerf-volant est égale à 0,67 m².

5. Éloi décide de fabriquer 20 cerfs-volants. Pour cela, il achète des grandes tiges [AD] à 2,40 € pièce, des petites tiges [BF] à 1,15 € pièce et de la toile à cerf-volant à 12 € le m².

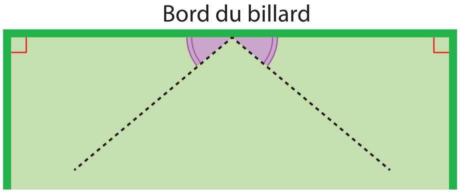
Écrire en une seule expression puis calculer le prix des 20 cerfs-volants.

$20 \times (2{,}4\text{ €} + 2 \times 1{,}15\text{ €} + 0{,}67 \times 12\text{ €}) = 254{,}8\text{ €}$

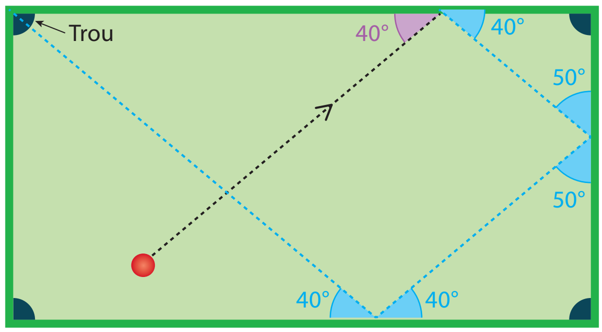
Les 20 cerfs-volants vont couter 254,8 €.

5 Le billard
Raisonner, représenter

Lorsqu'on joue au billard, la boule décrit une trajectoire rectiligne et rebondit sur les bords du billard en faisant des angles égaux avec le bord du billard comme indiqué sur la figure ci-dessous.

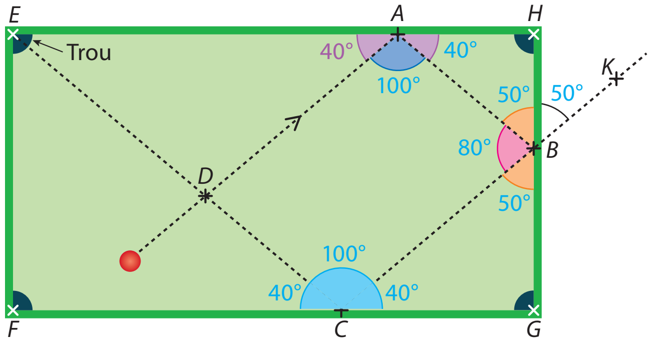


1. Compléter la trajectoire de la boule le plus précisément possible sur le billard ci-dessous pour estimer si la boule rentre dans le trou. Déterminer la mesure exacte des angles de rebond.



La boule semble rentrer dans le trou.

2. La trajectoire de la boule fait un quadrilatère *ABCD*. Quelle est la nature de ce quadrilatère ?



$\widehat{ABC} = 180° - (50° + 50°) = 80°$

$\widehat{KBH} = 180° - (80° + 50°) = 50°$

Les droites (*AD*) et (*BC*) forment avec la sécante (*AB*) des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABK}$ alternes-internes et de même mesure 100°. Donc les droites (*AD*) et (*BC*) sont parallèles.

De même, (*CD*) et (*AB*) sont parallèles car elles forment avec la sécante (*CB*) deux angles correspondants égaux à 100°

On peut ainsi conclure que le quadrilatère *ABCD* a des côtés opposés deux à deux parallèles, donc c'est un parallélogramme.

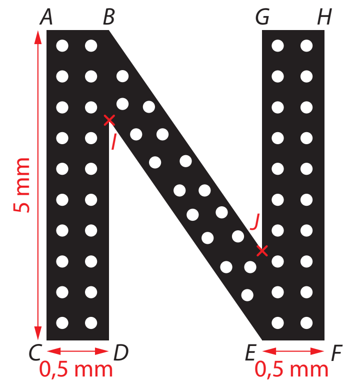
6 Lettres à trou

Raisonner, Calculer

Aurélien est imprimeur. Il utilise beaucoup d'encre pour imprimer toutes les pages qui lui sont commandées. Afin de réduire le cout de l'encre, il utilise une technique qui consiste à réduire la surface à teinter de chaque lettre en y insérant des petits disques blancs suffisamment petits pour qu'ils ne se voient pas.

Il sait que s'il diminue de t % la surface à teinter, il économisera t % de litres d'encre.

On a fait ci-dessous un agrandissement d'une lettre remplie de ces petits disques blancs.



Chaque disque a un rayon de 0,05 mm.

Sur la figure ci-dessus, *ABDC* et *EFHG* sont des rectangles, le quadrilatère *ABFE* est un parallélogramme.

On a $BI = EJ = 0{,}75$ mm.

1. Calculer la surface à teinter (en mm²) pour remplir toute la lettre d'encre s'il n'y avait pas de trous.

$\mathcal{A}_{ABDC} = 0{,}5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} = 2{,}5 \text{ mm}^2$

$\mathcal{A}_{EFHG} = 0{,}5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} = 2{,}5 \text{ mm}^2$

$\mathcal{A}_{ABFE} = 0{,}5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} = 2{,}5 \text{ mm}^2$

Aire des deux triangles *ABI* et *JEF* qui sont comptés deux fois : $2 \times \dfrac{0{,}5 \text{ mm} \times 0{,}75 \text{ mm}}{2} = 0{,}375 \text{ mm}^2$.

La surface à teinter est donc :

$3 \times 2{,}5 \text{ mm}^2 - 0{,}375 \text{ mm}^2 = 7{,}125 \text{ mm}^2$

2. Calculer l'aire totale des disques. On arrondira au millième de mm².

$\mathcal{A} = 56 \times \pi \times (0{,}05 \text{ mm})^2 \approx 0{,}440 \text{ mm}^2$

3. Calculer le pourcentage d'économie de surface à teinter que réalise Aurélien sur l'impression de cette lettre. On arrondira au dixième de pourcent près.

$\dfrac{0{,}440}{7{,}125} \approx 0{,}062$ soit environ 6,2 %.

4. Avant d'utiliser cette technique d'économie, Aurélien utilisait chaque mois 200 L d'encre. Combien de litres par mois cette technique lui permet-elle d'économiser ?

Il économise 6,2 % de 200 L.

$200 \text{ L} \times \dfrac{6{,}2}{100} = 12{,}4$ L.

Aurélien économise 12,4 L d'encre par mois.