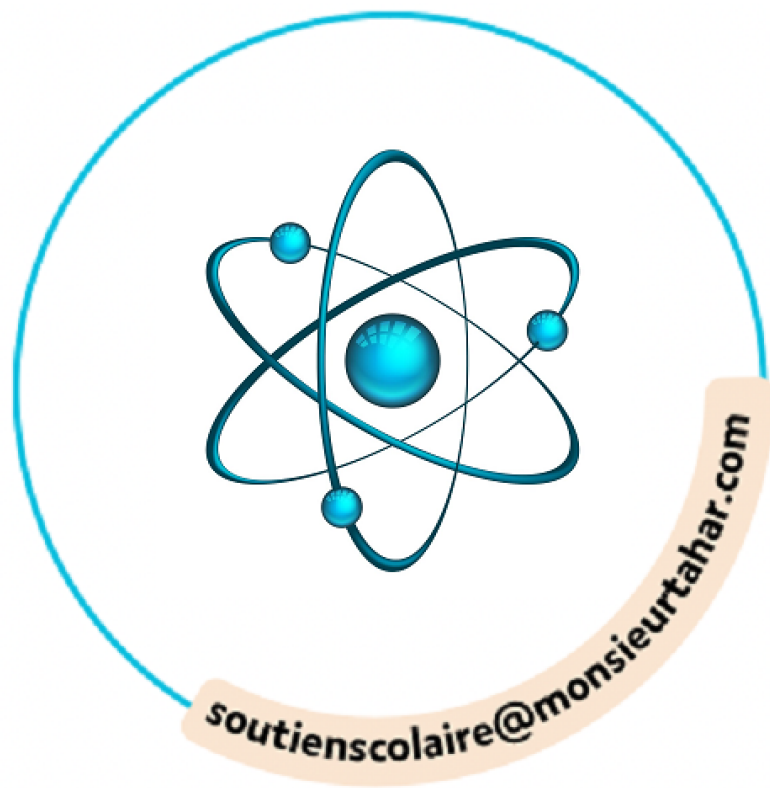


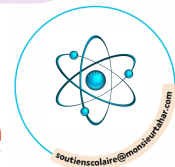
# MATHS



## CHAPITRE 8

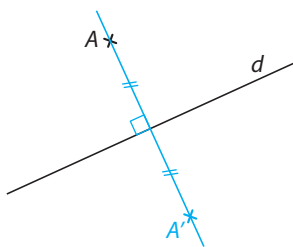
## 1

## Transformer une figure par symétrie axiale

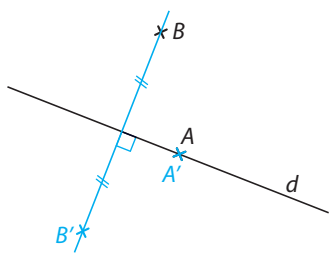


- Soit  $d$  une droite.
- Si un point  $A$  n'appartient pas à la droite  $d$ , alors son **symétrique** par rapport à la droite  $d$  est le point  $A'$  tel que  $d$  est la **médiatrice** du segment  $[AA']$ .
  - Si un point  $B$  appartient à la droite  $d$ , alors son symétrique par rapport à la droite  $d$  est lui-même.

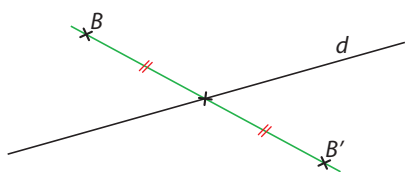
- 1 Construire le point  $A'$  symétrique du point  $A$  par rapport à la droite  $d$ .



- 2 Construire les points  $A'$  et  $B'$  symétriques des points  $A$  et  $B$  par rapport à la droite  $d$ .



- 3 Les points  $B$  et  $B'$  sont-ils symétriques par rapport à la droite  $d$ ? Justifier.



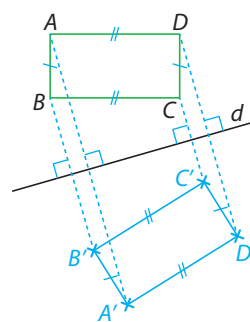
$B$  et  $B'$  ne sont pas symétriques par rapport à la droite  $d$  car  $d$  n'est pas la médiatrice du segment  $[BB']$ .

- 4 **MODE EXPERT** Soient  $d$  une droite et  $M$  un point quelconque. Que peut-on dire du symétrique du symétrique du point  $M$  par rapport à  $d$ ? Est-ce vrai quelle que soit la position du point  $M$ ?

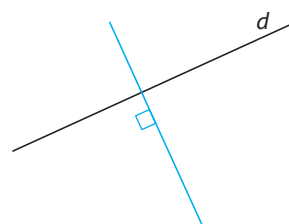
Quelle que soit la position du point  $M$ , qu'il soit .....  
ou non sur  $d$ , le symétrique du symétrique de  $M$  .....  
est le point  $M$  lui-même.

- Soit  $\mathcal{F}$  une figure et  $d$  une droite.
- On appelle **symétrique** de la figure  $\mathcal{F}$  par rapport à la droite  $d$  la figure obtenue en construisant le symétrique de chaque point de la figure  $\mathcal{F}$ . La droite  $d$  est appelée **axe de symétrie** de  $\mathcal{F}$ .
  - Deux figures symétriques par rapport à une droite  $d$  sont **superposables** : elles se superposent quand on « plie » selon cette droite.

- 5 Construire le symétrique du rectangle  $ABCD$  par rapport à la droite  $d$ .



- 6 **MODE EXPERT** Tracer une droite qui est son propre symétrique par rapport à la droite  $d$  tracée ci-dessous.

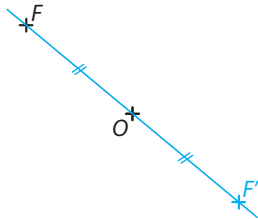


# 2

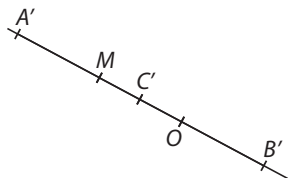
## Transformer une figure par symétrie centrale

- Soit  $O$  un point. Par la symétrie de centre  $O$  :
  - le symétrique d'un point  $C$  distinct de  $O$  est le point  $C'$  tel que  $O$  est le **milieu du segment**  $[CC']$  ;
  - le symétrique du point  $O$  est **lui-même**.

7 Construire le symétrique  $F'$  du point  $F$  par rapport au point  $O$ .

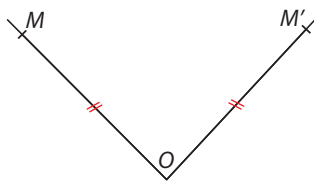


8 L'un des trois points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport à  $O$ . Lequel ?



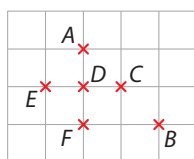
Le symétrique du point  $M$  par rapport à  $O$  est  $B'$ .

9 Driss dit que le point  $M'$  est le symétrique du point  $M$  par rapport au point  $O$ . A-t-il raison ? Justifier.



Il n'a pas raison car le point  $O$  n'est pas le milieu de  $[MM']$ .

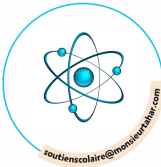
10 En observant la figure, compléter les phrases.



- $B$  est le **symétrique** de  $A$  par rapport au point  $C$ .
- $E$  et  $F$  sont les symétriques respectifs de  $C$  et  $A$  par rapport au point  $D$ .

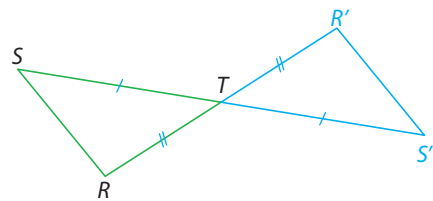
11 **MODE EXPERT** Quel est le symétrique du symétrique d'un point  $A$  par rapport à un point  $O$  ?

C'est le point  $A$ .

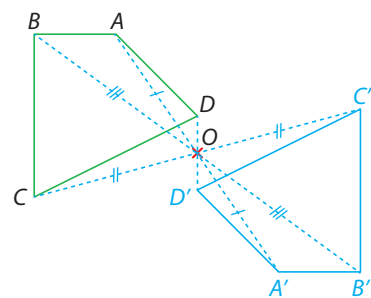


- Soit  $\mathcal{F}$  une figure et  $O$  un point.
  - On appelle symétrique de la figure  $\mathcal{F}$  par rapport au point  $O$ , la figure obtenue en construisant le symétrique de chaque point de la figure  $\mathcal{F}$  par rapport à  $O$ . Le point  $O$  est appelé le **centre de symétrie** de la figure  $\mathcal{F}$ .
  - Deux figures symétriques par rapport à un point  $O$  se **superposent** lorsqu'on effectue un demi-tour autour du point  $O$ .

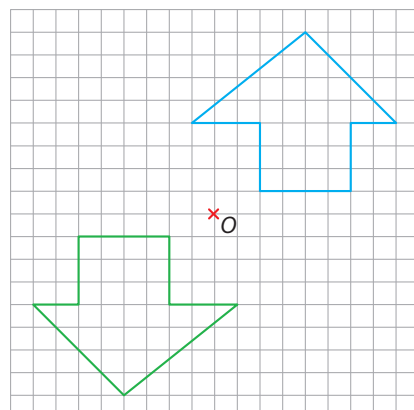
12 Construire le symétrique du triangle  $RST$  par rapport au point  $T$ .



13 Construire le symétrique du quadrilatère  $ABCD$  par rapport au point  $O$ .



14 **MODE EXPERT** En utilisant le quadrillage, construire le symétrique de la figure par rapport au point  $O$ .

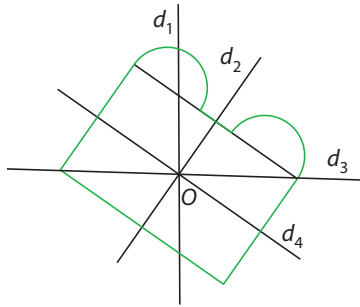


# 3

## Reconnaitre un axe ou un centre de symétrie

- On dit qu'une droite  $d$  est un **axe de symétrie** d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à la droite  $d$  est la figure elle-même.
- On dit qu'un point  $O$  est le **centre de symétrie** d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport au point  $O$  est la figure elle-même.

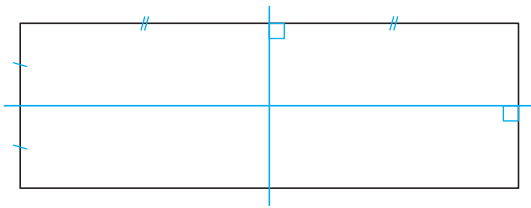
15 Vrai ou faux ?



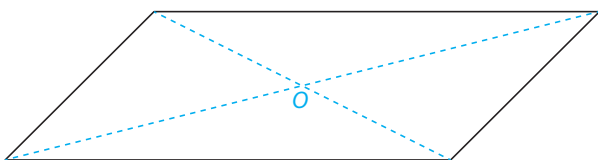
Pour la figure verte, il semble que :

- a.  $O$  soit le centre de symétrie. **Faux**
- b.  $d_1$  soit un axe de symétrie. **Faux**
- c.  $d_2$  soit un axe de symétrie. **Vrai**
- d.  $d_3$  soit un axe de symétrie. **Faux**
- e.  $d_4$  soit un axe de symétrie. **Faux**

16 Tracer les axes de symétrie du rectangle ci-dessous.

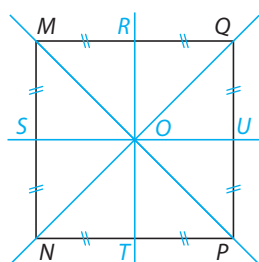


17 Tracer le centre de symétrie du parallélogramme ci-dessous.

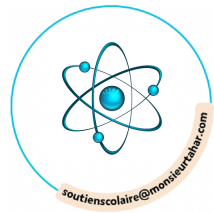
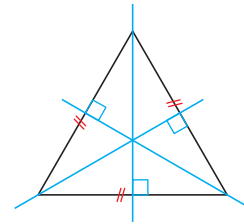


18 Tracer le centre de symétrie et les axes de symétrie du carré ci-contre.

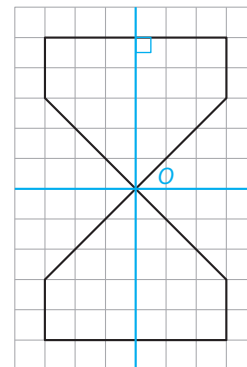
- $O$  est le centre de symétrie.
- $(RT)$ ,  $(SU)$ ,  $(MP)$  et  $(ON)$  sont des axes de symétrie.



19 Tracer tous les axes de symétrie de la figure suivante.

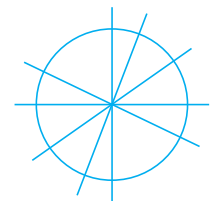


20 Placer le centre de symétrie et tracer tous les axes de symétrie de la figure ci-dessous.



21 **MODE EXPERT** Emilien dit à Aurore : « Une figure ne peut pas avoir une infinité d'axes de symétrie ». Aurore lui répond : « Si, c'est possible ». Qui a raison ?

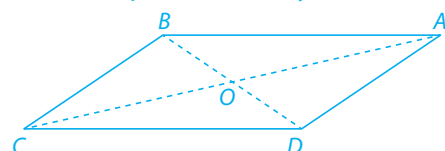
Aurore a raison. Un cercle a pour axes de symétrie toutes les droites portées par ses diamètres. Il y en a une infinité.



22 **MODE EXPERT** Vrai ou faux ? Justifier.

Si une figure a un centre de symétrie, alors elle a au moins deux axes de symétrie qui sont perpendiculaires.

Faux. Le parallélogramme ci-dessous a un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie.



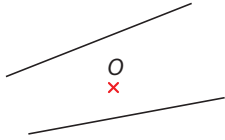
# 4

## Utiliser les propriétés de la symétrie centrale

- ▶ Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite : on dit que la symétrie centrale **conserve les alignements**.
- ▶ Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont **parallèles**.

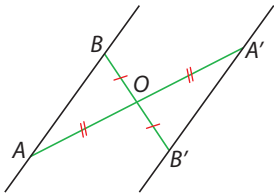
**23** Les droites ci-dessous sont-elles symétriques par rapport au point  $O$  ? Justifier.

a.



Non, car les deux droites ne sont pas parallèles.

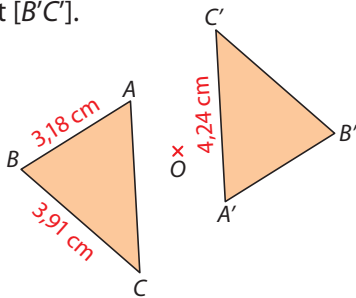
b.



$O$  est le milieu de  $[AA']$  et de  $[BB']$ , donc  $A'$  et  $B'$  sont les symétriques respectifs de  $A$  et de  $B$  par rapport à  $O$ . Donc la droite  $(A'B')$  est le symétrique de la droite  $(AB)$  par rapport à  $O$ .

- ▶ Le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment de même longueur : on dit que la symétrie centrale **conserve les longueurs**.

**24** Les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont symétriques par rapport à  $O$ . Déterminer les longueurs des segments  $[AC]$ ,  $[A'B']$  et  $[B'C']$ .



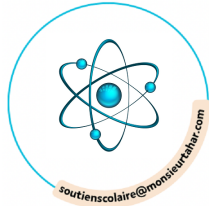
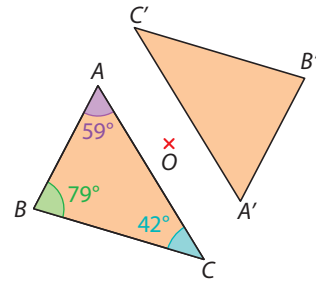
La symétrie centrale conserve les longueurs donc  $AC = 4,24$  cm,  $A'B' = 3,18$  cm et  $B'C' = 3,91$  cm.

**25** Le cercle  $\mathcal{C}$  a pour rayon 3,2 cm. Quel est le rayon du cercle  $\mathcal{C}'$  symétrique de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $O$  ? Justifier.

La symétrie centrale conserve les longueurs, donc le rayon du symétrique de  $\mathcal{C}$  est égal à 3,2 cm.

- ▶ Deux figures symétriques par rapport à un point ont la même forme. On dit que la symétrie centrale (comme la symétrie axiale) **conserve les mesures des angles, les périmètres et les aires**.

**26** Le triangle  $A'B'C'$  est le symétrique du triangle  $ABC$  par rapport à  $O$ . Donner la mesure de chacun des angles du triangle  $A'B'C'$ .



La symétrie centrale conserve les angles, donc  $\widehat{C'A'B'} = \widehat{CAB} = 59^\circ$ ;  $\widehat{B'C'A'} = \widehat{BCA} = 42^\circ$  et  $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = 79^\circ$ .

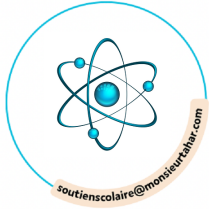
**27** **MODE EXPERT** Boris écrit sur sa copie : « Le symétrique d'un carré par rapport à un point est un carré ». Mais Boris n'arrive pas à le justifier. Aider Boris pour sa justification.

La symétrie centrale conserve les longueurs et les angles, donc le symétrique d'un carré par rapport à un point est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. C'est donc un carré.

**28** **MODE EXPERT** Sur un cercle  $\mathcal{C}$ , on place deux points  $M$  et  $N$  puis les points  $M'$  et  $N'$  diamétralement opposés à  $M$  et  $N$ .

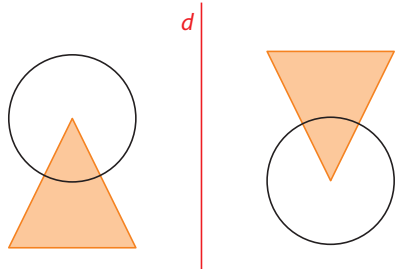
Que peut-on dire des longueurs  $M'N'$  et  $MN$  ? Justifier.

Comme  $M'$  est diamétralement opposé à  $M$  et  $N'$  est diamétralement opposé à  $N$ , alors  $M'$  et  $N'$  sont les symétriques de  $M$  et  $N$  par rapport au centre du cercle. On en déduit que les segments  $[MM']$  et  $[M'N']$  sont symétriques par rapport au centre du cercle. Or la symétrie centrale conserve les longueurs. Donc  $M'N' = MN$ .

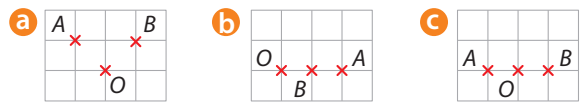



## 29 Parcours ceinture jaune

1. Si  $d$  est la médiatrice du segment  $[RS]$ , alors  $S$  est-il le symétrique de  $R$  par rapport à  $d$ ? **Oui**.....
2. Les figures suivantes sont-elles symétriques par rapport à la droite  $d$ ? **Non**.....




3. Dans quel cas le point  $A$  est-il le symétrique de  $B$  par rapport à  $O$ ? **Le cas c**.....



4. La figure ci-contre admet-elle la droite  $d$  comme axe de symétrie? **Oui**..... 
5. Compléter.  
Par une symétrie centrale, le symétrique d'un segment de longueur 5 cm a pour longueur **5 cm**.....

## 30 Parcours ceinture verte

1. Le symétrique d'une droite  $(AB)$  par rapport à une droite  $d$  est-il toujours une droite parallèle à  $(AB)$ ? **Non**.....
2. La figure suivante a-t-elle deux axes de symétrie? **Non**..... 
3. Si  $AO = A'O$ , alors  $A'$  est-il obligatoirement le symétrique de  $A$  par rapport à  $O$ ? **Non**.....

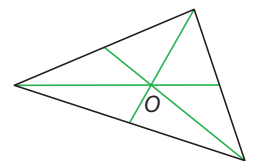
4. Compléter.  
Si  $A'$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $O$  et  $B'$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $O$ , alors  $A'B' = AB$ .....
5. Le symétrique d'une droite  $d$  par rapport à un point  $O$  est-il une droite perpendiculaire à  $d$ ? **Non**.....

## 31 Parcours ceinture noire

1. Quel est le symétrique par rapport à une droite  $d$  d'une droite perpendiculaire à  $d$ ? **C'est la droite elle-même**.....
2. La médiatrice d'un segment  $[AB]$  est-elle le seul axe de symétrie du segment  $[AB]$ ? **Non**.....
3. Si le segment  $[A'B']$  est le symétrique du segment  $[AB]$  par rapport à un point  $O$ , alors  $AA'$  est-il égal à  $BB'$ ? **Non**.....

4. Un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon 5 cm a pour symétrique, par rapport à un point  $O$ , le cercle  $\mathcal{C}'$ . Quel est le périmètre du cercle  $\mathcal{C}'$  arrondi au millimètre? **31,4 cm**.....

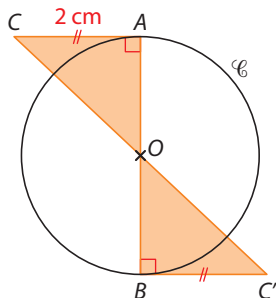
5. Le point  $O$  ci-contre est-il le centre de symétrie de la figure? **Non**.....



## 32 Un énoncé

Raisonner, Communiquer

Le professeur de mathématiques veut faire construire la figure ci-dessous à ses élèves. Quel énoncé doit-il écrire ?



- Construire un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$ .
- Placer un point  $A$  sur  $\mathcal{C}$ .
- Construire le point  $B$  symétrique de  $A$  par rapport au point  $O$ .
- Construire un triangle  $OAC$  rectangle en  $A$  tel que  $AC = 2$  cm.
- Construire le symétrique du triangle  $OAC$  par rapport à  $O$ .

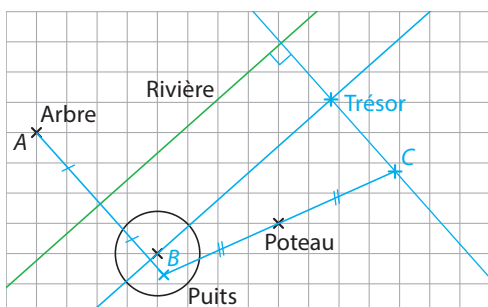
## 33 Le trésor

Chercher, Représenter, Modéliser

Max veut enterrer son trésor. Pour choisir l'endroit, il réalise la construction décrite ci-dessous.

Il se positionne sous l'arbre en  $A$ . Il trace le symétrique  $B$  de  $A$  par rapport à la rivière. Constatant que ce point se trouve dans le puits, il décide alors de placer le trésor à l'intersection de la parallèle à la rivière passant par le centre du puit et de la perpendiculaire à la rivière passant par le symétrique de  $B$  par rapport au poteau.

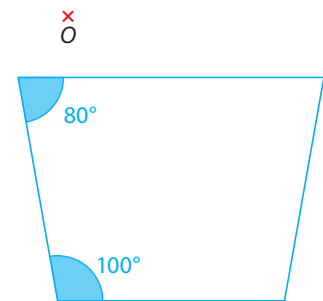
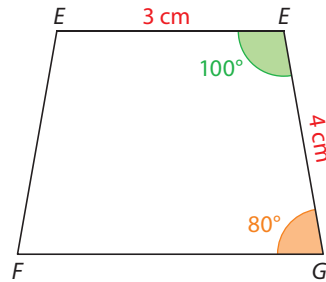
► Compléter la figure suivante pour déterminer l'endroit où se trouve le trésor.



## 34 Construction

Représenter, Raisonner

Construire le symétrique de la figure suivante par rapport au point  $O$ .



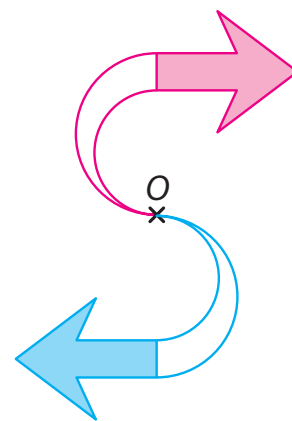
## 35 Le logo

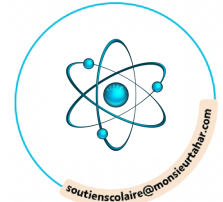
Raisonner, Représenter

Mathias veut dessiner un logo pour son entreprise qui travaille dans l'aéronautique.

Il a dessiné une première partie du logo. Il lui reste à dessiner le symétrique de la figure suivante par rapport à  $O$ .

► Compléter la figure.





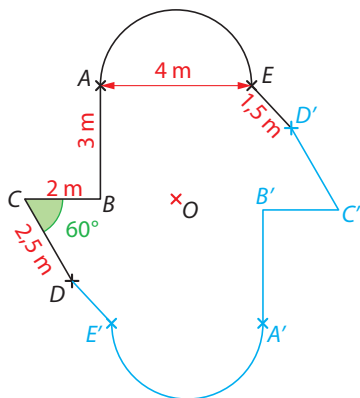
## Problèmes

### 36 La piscine

Raisonner, Calculer

Aaron veut construire une piscine. Il a commencé à en faire un plan et souhaite qu'elle ait le point  $O$  comme centre de symétrie.

1. Compléter le plan de la piscine.



2. Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{B'C'D'}$  ?

Comme la symétrie centrale conserve les mesures des angles,  $\widehat{B'C'D'} = \widehat{BCD} = 60^\circ$ .

3. Calculer le périmètre de la piscine en justifiant la réponse. On arrondira au cm.

La symétrie centrale conserve les longueurs, donc :

$$A'B' + B'C' + C'D' + DE' = 3 \text{ m} + 2 \text{ m} + 2,5 \text{ m} + 1,5 \text{ m}$$

$$= 9 \text{ m.}$$

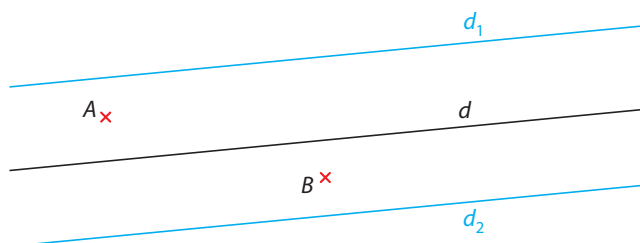
De plus, le demi-cercle a pour rayon 2 m donc sa longueur est environ  $2 \text{ m} \times \pi \approx 6,28 \text{ m}$ .

Le périmètre total de la figure est donc d'environ :

$$P = 2 \times (9 \text{ m} + 6,28 \text{ m}) = 30,56 \text{ m.}$$

### 37 Avec trois droites

1. Construire la droite  $d_1$ , symétrique de la droite  $d$  par rapport au point  $A$ , et la droite  $d_2$ , symétrique de la droite  $d$  par rapport au point  $B$ .



2. Que peut-on dire de  $d_1$  et  $d_2$  ? Justifier.

$d$  et  $d_1$  sont symétriques par rapport à  $A$ , donc  $d \parallel d_1$ .

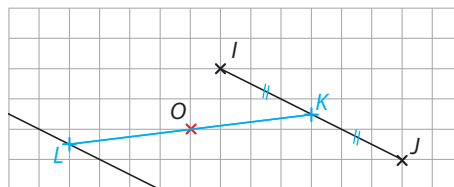
De même,  $d \parallel d_2$ .

$d_1$  et  $d_2$  sont parallèles à une même droite, donc elles sont parallèles entre elles.

### 38 Le milieu perdu

Raisonner, Communiquer

Dans la figure ci-dessous,  $M$  est le symétrique du point  $I$  par rapport au point  $O$ , et  $N$  est le symétrique du point  $J$  par rapport au point  $O$ . Malheureusement, le segment  $[MN]$  n'a pas pu être tracé dans sa totalité.



1. Sans construire  $M$  et  $N$ , placer dans la figure ci-dessus le milieu  $L$  du segment  $[MN]$  et expliquer comment ce point a été construit.

On construit le symétrique du milieu  $K$  de  $[IJ]$  par rapport au point  $O$ .

2. L'objectif des questions suivantes est de justifier que le point  $L$  ainsi construit est bien le milieu du segment  $[MN]$ .

a. Démontrer que les points  $M$ ,  $L$  et  $N$  sont alignés.

$I$ ,  $J$  et  $K$  ont pour symétriques  $M$ ,  $N$  et  $L$ .

Or la symétrie centrale conserve l'alignement, donc  $M$ ,  $L$  et  $N$  sont alignés.

b. Démontrer que  $ML = LN$ .

La symétrie centrale conserve les distances donc  $ML = IK$  et  $NL = JK$ .

Or  $IK = JK$ , donc  $ML = NL$ .

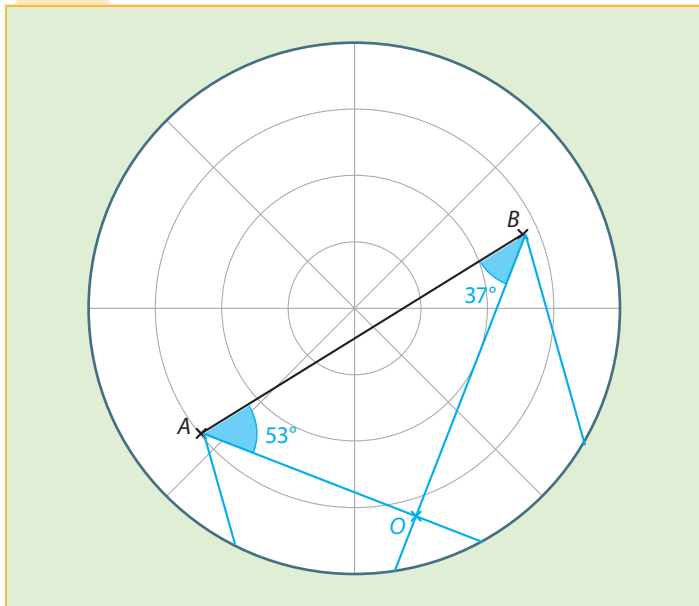
c. Conclure.

$M$ ,  $L$  et  $N$  sont alignés et  $ML = NL$ , donc  $L$  est bien le milieu de  $[MN]$ .

## Tâche complexe

39 Une escadrille de cinq avions  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $O$  a décollé de sa base. Durant leur vol, les avions doivent conserver la même position les uns par rapport aux autres : ils forment un losange  $ABCD$  et l'avion  $O$ , chef d'escadrille, vole au centre du losange. L'avion  $O$  indique par radio que son radar fonctionne mal. Il n'affiche plus sa propre position, et permet seulement de visualiser la position des avions  $A$  et  $B$ .

### Doc 1 Radar de l'avion $O$



### Doc 2 Données des avions $A$ et $B$

Les avions  $A$  et  $B$  communiquent les données qu'ils lisent sur leurs radars :

- $\widehat{DAB} = 106^\circ$
- $\widehat{ABC} = 74^\circ$
- $AB = 100$  m

- Placer la position de l'avion  $O$  sur son radar schématisé et en déduire des valeurs approchées des distances réelles entre l'avion  $O$  et les avions  $A$  et  $B$ . Justifier la construction.

$ABCD$  est un losange donc ses diagonales sont des axes de symétrie. Ainsi, les droites  $(OA)$  et  $(OB)$  sont les axes de symétrie des angles  $\widehat{DAB}$  et  $\widehat{ABC}$ . On a donc  $\widehat{OAB} = 53^\circ$  et  $\widehat{OBA} = 37^\circ$ .

On trace ces deux droites et on trouve le point  $O$ .

On mesure sur le schéma  $OA \approx 3$  cm et  $OB \approx 4$  cm. Sur le radar, 5 cm correspondent à 100 m donc par proportionnalité, 3 cm correspondent à  $\frac{100}{5} \times 3 = 60$  m et 4 cm correspondent à  $\frac{100}{5} \times 4 = 80$  m. L'avion  $O$  se trouve donc à environ 60 m et 80 m respectivement des avions  $A$  et  $B$ .



## Le jeu

### Palindromes géométriques

Par groupe de deux.

En utilisant les lettres ci-dessous, construire des mots ayant un axe de symétrie. Celui qui construit le mot le plus long a gagné.

A B C D E F G H I  
J K L M N O P Q R  
S T U V W X Y Z

## Le défi

### L'heure symétrique

Adrien entre dans la cantine, il regarde l'heure indiquée et s'aperçoit que cette heure admet un centre de symétrie.

Quand il sort de la cantine une demi-heure plus tard, il s'aperçoit que l'heure affichée admet un axe de symétrie.

À quelle heure est-il rentré à la cantine ?

12:21