

Calculer une longueur grâce au théorème de Thalès

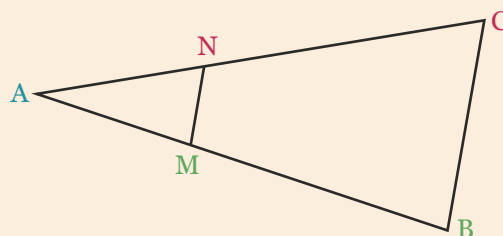
Théorème de Thalès :

Soit ABC un triangle tel que :

- M appartient au segment [AB] ;
- N appartient au segment [AC] ;
- les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Alors on a les égalités suivantes : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Remarque : On peut aussi écrire $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.



➤ Retrouvez un cours complet sur [LLS.fr/M4P216](https://lls.fr/M4P216).

Les méthodes en vidéo sur [LLS.fr/M4EXVideo29](https://lls.fr/M4EXVideo29).

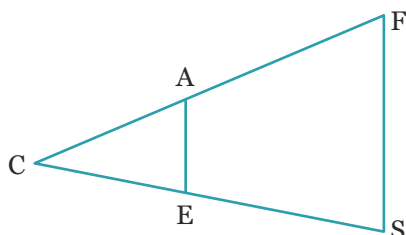
1 [Cal.3]

Relier chaque égalité de gauche à l'égalité de droite qui lui correspond.

$\frac{AB}{10} = \frac{3}{7}$	$\times$	$AB = \frac{7 \times 10}{3}$
$\frac{3}{10} = \frac{7}{AB}$	$\times$	$AB = \frac{3 \times 7}{10}$
$\frac{10}{7} = \frac{3}{AB}$	$\times$	$AB = \frac{3 \times 10}{7}$

2 [Rais.5]

Dans la figure ci-dessous, on sait que les droites (AE) et (FS) sont parallèles, que $A \in [CF]$ et $E \in [CS]$.



1. Entourer les égalités de quotients qui sont correctes concernant cette figure.

$\frac{CA}{CE} = \frac{AE}{FS}$	$\frac{CA}{CE} = \frac{CF}{CS}$	$\frac{CA}{CF} = \frac{AE}{FS}$
$\frac{AE}{FS} = \frac{CE}{CS}$	$\frac{CA}{CF} = \frac{CE}{ES}$	$\frac{CA}{CF} = \frac{CE}{CS}$

2. On donne à présent les informations suivantes.

CA = 1,4 cm, CF = 3 cm et FS = 3,3 cm.

Parmi les égalités choisies, laquelle doit-on utiliser pour trouver AE ? Déterminer cette valeur.

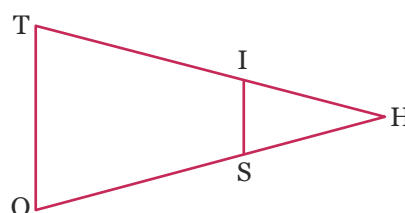
Pour déterminer la valeur de AE on utilisera l'égalité

$\frac{CA}{CF} = \frac{AE}{FS}$. En remplaçant par les valeurs connues, on

obtient $\frac{1,4}{3} = \frac{AE}{3,3}$, d'où $AE = \frac{1,4 \times 3,3}{3} = 1,54$ cm.

3 [Ch.1 - Cal.4]

Dans cette figure, on sait que les droites (IS) et (TO) sont parallèles, que $I \in [TH]$ et $S \in [OH]$.



1. Justifier que les conditions d'application du théorème de Thalès sont bien vérifiées.

THO est un triangle tel que I appartient à [TH] et S appartient à [OH].

De plus, les droites (IS) et (TO) sont parallèles.

Les conditions d'application du théorème de Thalès sont bien vérifiées.

2. Compléter les trois quotients égaux que le théorème de Thalès permet d'écrire.

$$\frac{HI}{HT} = \frac{HS}{HO} = \frac{IS}{TO}$$

3. Pour cette question, on donne les longueurs suivantes : HI = 8 cm, HT = 22 cm, IS = 4 cm et HO = 26,4 cm.

Déterminer les longueurs HS et TO.

En remplaçant par les valeurs connues, on obtient

$$\frac{8}{22} = \frac{HS}{26,4} = \frac{4}{TO}$$

$$\text{D'où } HS = \frac{HI \times HO}{HT} = \frac{8 \times 26,4}{22} = 9,6 \text{ cm et}$$

$$TO = \frac{HT \times IS}{HI} = \frac{22 \times 4}{8} = 11 \text{ cm.}$$



Calcul mental

1. $\frac{7}{42} = \frac{21}{126}$

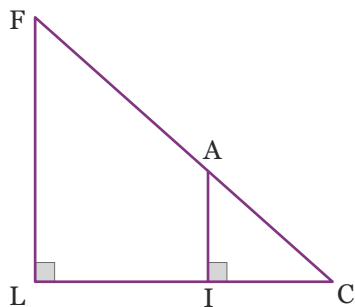
2. $\frac{11}{7} = \frac{55}{35}$

3. $\frac{-12}{-18} = \frac{6}{9}$

4. $\frac{5}{1,5} = \frac{40}{12}$

4 [Rais.4 - Com.4]

Dans la figure ci-dessous, on sait que $FL = 12$ m, $AI = 5$ m et $FC = 18$ m. De plus, on sait que (FL) et (LC) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (AI) et (LC) .



1. Démontrer que (FL) et (AI) sont parallèles.

Les droites (FL) et (AI) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (LC) donc elles sont parallèles entre elles.

2. Déterminer la longueur CA .

FLC est un triangle tel que A appartient à $[FC]$ et I appartient à $[LC]$.

De plus, les droites (FL) et (AI) sont parallèles.

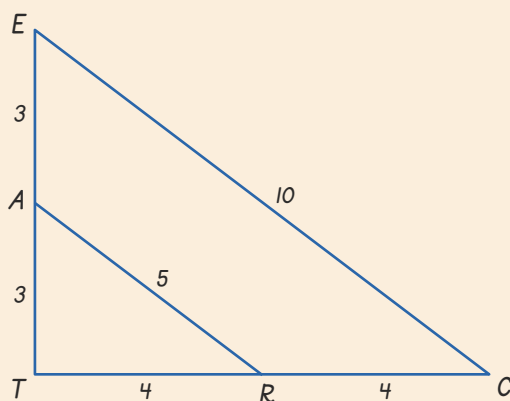
D'après le théorème de Thalès, $\frac{CA}{CF} = \frac{AI}{FL}$,

d'où $\frac{CA}{18} = \frac{5}{12}$ et donc $CA = \frac{18 \times 5}{12} = 7,5$ m.

5 INVERSÉ [Rep.6]

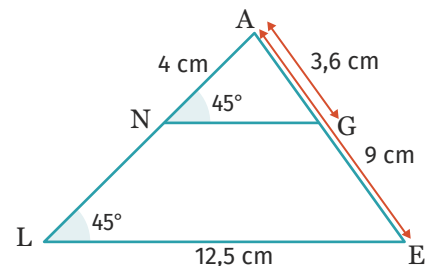
Proposer une figure pour laquelle on aurait $TR < TC$ ainsi que l'égalité suivante :

$$\frac{TR}{TC} = \frac{TA}{TE} = \frac{RA}{CE}.$$



6 [Rais.4 - Com.4]

Dans la figure ci-contre, déterminer la longueur AL . On supposera que $N \in [AL]$ et $G \in [AE]$.



ALE est un triangle tel que N appartient à $[AL]$ et G appartient à $[AE]$.

De plus, les droites (NG) et (LE) sont parallèles puisque les angles $\widehat{ANG}$ et $\widehat{ALE}$ sont correspondants et de même mesure.

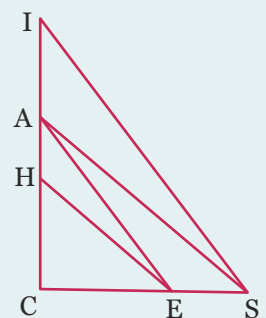
D'après le théorème de Thalès, on a donc

$$\frac{AN}{AL} = \frac{AG}{AE} = \frac{NG}{LE} \text{ d'où } \frac{4}{AL} = \frac{3,6}{9} = \frac{NG}{12,5}$$

et donc $AL = \frac{4 \times 9}{3,6} = 10$ cm.

LE COIN DES EXPERTS

7 Dans la figure ci-contre, on sait que les droites (HE) et (AS) sont parallèles, ainsi que les droites (AE) et (IS) . De plus, on a les longueurs suivantes : $CH = 4,5$, $HA = 2,5$, $CE = 5,4$ et $IS = 14$. Déterminer la longueur AE .



CAS est un triangle tel que H appartient à $[CA]$ et E appartient à $[CS]$.

De plus, les droites (HE) et (AS) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a donc

$$\frac{CH}{CA} = \frac{CE}{CS} = \frac{HE}{AS} \text{ d'où } \frac{4,5}{4,5 + 2,5} = \frac{5,4}{CS}$$

et donc $CS = \frac{7 \times 5,4}{4,5} = 8,4$ cm.

CIS est un triangle tel que A appartient à $[CI]$ et E appartient à $[CS]$.

De plus, les droites (AE) et (IS) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a donc

$$\frac{CA}{CI} = \frac{CE}{CS} = \frac{AE}{IS}, \text{ d'où } \frac{7}{8,4} = \frac{5,4}{14} = \frac{AE}{IS}$$

et donc $AE = \frac{5,4 \times 14}{8,4} = 9$ cm.



Entraînement

Montrer que deux droites sont parallèles ou non

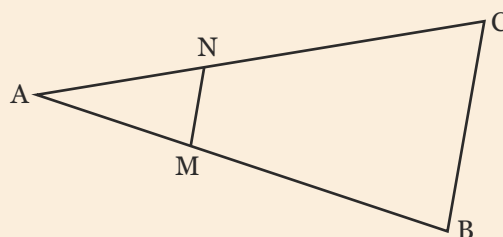
Réciproque du théorème de Thalès :

Soit ABC un triangle tel que :

- M appartient au segment [AB] ;
- N appartient au segment [AC] ;
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Remarque : Si, dans les mêmes conditions, les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ ne sont pas égaux, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.



➤ Retrouvez un cours complet sur LLS.fr/M4P216.



Les méthodes en vidéo sur LLS.fr/M4EXVideo30.

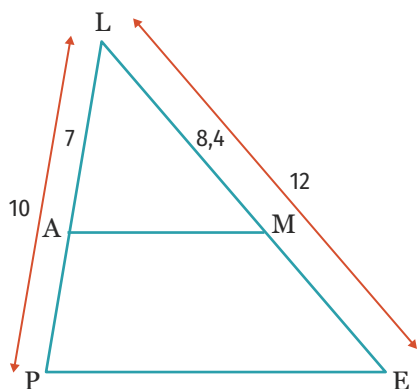
8 [Rais.5] ●●●●●

Dans la liste ci-dessous, entourer d'une même couleur les quotients qui sont égaux.

$\left(\frac{30}{45}\right)$; $\left(\frac{43,5}{60,9}\right)$; $\left(\frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{7}\right)$; $\left(\frac{11}{15}\right)$;
 $\left(\frac{3,4}{5,1}\right)$; $\left(\frac{70}{98}\right)$; $\left(\frac{25,74}{35,1}\right)$; $\left(\frac{62,4}{93,6}\right)$; $\left(\frac{44}{60}\right)$

9 [Cal.4 - Rais.4] ●●●●●

Dans la figure ci-dessous, toutes les longueurs sont données en centimètre.



1. Comparer les quotients $\frac{LA}{LP}$ et $\frac{LM}{LE}$.

$$\frac{LA}{LP} = \frac{7}{10} = 0,7 \text{ et } \frac{LM}{LE} = \frac{8,4}{12} = 0,7.$$

$$\text{On a donc } \frac{LA}{LP} = \frac{LM}{LE}.$$

2. Les droites (AM) et (PE) sont-elles parallèles ?

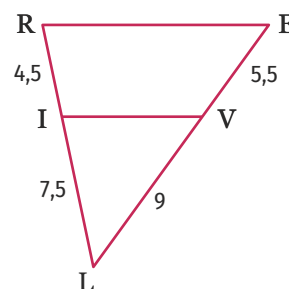
Dans le triangle LPE, A appartient à [LP] et M appartient à [LE].

$$\text{On sait de plus que } \frac{LA}{LP} = \frac{LM}{LE}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AM) et (PE) sont parallèles.

10 [Cal.4 - Rais.4] ●●●●●

Dans la figure ci-dessous, toutes les longueurs sont données en centimètre.



1. Comparer les quotients $\frac{LI}{LR}$ et $\frac{LV}{LE}$.

$$\frac{LI}{LR} = \frac{7,5}{7,5 + 4,5} = \frac{7,5}{12} = \frac{5}{8} \text{ et }$$

$$\frac{LV}{LE} = \frac{9}{9 + 5,5} = \frac{9}{14,5} = \frac{18}{29}. \text{ On a alors } \frac{LI}{LR} \neq \frac{LV}{LE}.$$

2. Les droites (IV) et (RE) sont-elles parallèles ?

LRE est un triangle tel que I appartient à [RL] et V appartient à [LE].

Puisque $\frac{LI}{LR} \neq \frac{LV}{LE}$ alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IV) et (RE) ne sont pas parallèles.

3. Quelle aurait dû être la valeur de LI pour obtenir le parallélisme des droites (IV) et (RE) ?

On désigne par x la longueur LI.

$$\text{On a alors } \frac{x}{x + 4,5} = \frac{9}{14,5}.$$

L'égalité des produits en croix donne alors $14,5 \times x = 9 \times (x + 4,5)$ d'où, en utilisant la simple distributivité, $14,5x = 9x + 40,5$, c'est-à-dire

$$5,5x = 40,5 \text{ et donc } x = 40,5 \div 5,5 = \frac{81}{11}.$$

Ainsi, LI aurait dû valoir $\frac{81}{11}$ cm pour obtenir le parallélisme des droites (IV) et (RE).



Calcul mental

1. $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

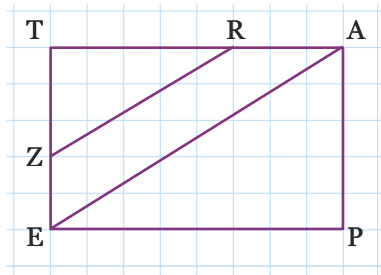
2. $\frac{5}{5+3} = \frac{7,5}{12}$

3. $\frac{9}{12} = \frac{6}{8}$

4. $\frac{10}{3} = \frac{20}{4+2}$

11 [Com.4 - Rais.4]

Dans la figure ci-dessous, l'unité est le carreau. TAPE est un rectangle de longueur 8 et de largeur 5.



Les droites (ZR) et (EA) sont-elles parallèles ?

TAE est un triangle tel que R appartient à [TA] et Z appartient à [TE].

De plus, $\frac{TR}{TA} = \frac{5}{8}$ et $\frac{TZ}{TE} = \frac{3}{5}$.

Puisque $5 \times 5 = 25$ et $8 \times 3 = 24 \neq 25$, alors $\frac{TR}{TA} \neq \frac{TZ}{TE}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (ZR) et (EA) ne sont pas parallèles.

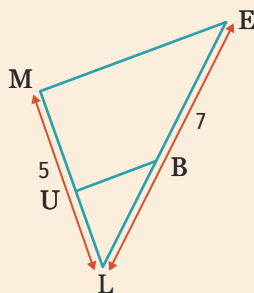
12 INVERSÉ [Ch.2 - Rais.5]



Proposer sur cette figure des mesures pour tous les segments qui n'en ont pas afin que les droites (ME) et (UB) soient parallèles.



Coup de pouce : Faire attention à ce que les triangles soient constructibles !



On peut proposer par exemple les mesures suivantes : $UL = 2,5$ cm, $BL = 3,5$ cm, $BU = 5$ cm et $ME = 10$ cm.

Ainsi, $\frac{LU}{LM} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$ et $\frac{LB}{LE} = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2}$, ainsi que

$$\frac{BU}{ME} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Puisque $\frac{LU}{LM} = \frac{LB}{LE}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (UB) et (ME) sont parallèles.

13 [Com.4 - Rais.4]

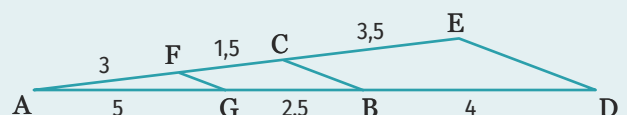
Dans chaque cas, C appartient au segment [AE] et B appartient au segment [AD].

Pour chacune des configurations suivantes, déterminer si (BC) est parallèle à (DE).

Figure	Calculs	Parallélisme
	$\frac{AB}{AD} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AC}{AE} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$	☒ oui ☐ non
	$\frac{AB}{AD} = \frac{3}{5} = \frac{24}{40}$ et $\frac{AC}{AE} = \frac{4}{4} = \frac{32}{40}$	☐ oui ☒ non

LE COIN DES EXPERTS

14 Dans la figure suivante, les points A, F, C et E d'une part et A, G, B et D d'autre part sont alignés.



Les droites (FG), (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?

Dans ABC, on sait que F appartient à [AC] et que G appartient à [AB]. De plus, on a $\frac{AF}{AC} = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AG}{AB} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$. Donc $\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AB}$ et donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

Dans AED, on sait que C appartient à [AE] et que B appartient à [AD].

De plus, on a $\frac{AC}{AE} = \frac{4,5}{11,5}$ et $\frac{AB}{AD} = \frac{7,5}{11,5}$. Puisque $4,5 \times 11,5 = 51,75$ et que $8 \times 7,5 = 60 \neq 51,75$, alors $\frac{AC}{AE} \neq \frac{AB}{AD}$ et donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (CB) et (ED) ne sont pas parallèles. (FG) étant parallèle à (BC), elle n'est donc pas parallèle à (ED) non plus.

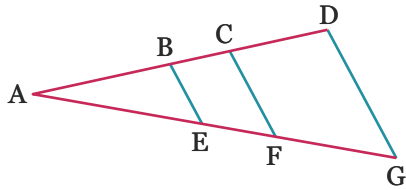


Bilan

15 QCM [Rais.1 - Rais.5]

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

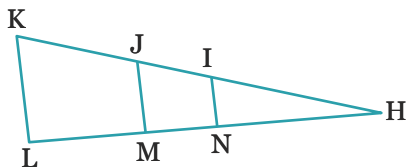
1. Dans la figure ci-dessous, les trois droites bleues sont parallèles entre elles.



On peut donc dire que :

- ☐ $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{EF}$ ☒ $\frac{AC}{AD} = \frac{AF}{AG}$
☐ $\frac{AB}{AD} = \frac{CF}{DG}$ ☒ $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$

2. Dans la figure ci-dessous, on sait que $\frac{HI}{HK} = \frac{HN}{HL}$ et que $\frac{HJ}{HK} \neq \frac{HM}{HL}$.



Alors on peut dire que :

- ☐ (JM) et (KL) sont parallèles.
☒ (IN) et (KL) sont parallèles.
☐ (IN) et (JM) sont parallèles.
☒ (IN) et (JM) ne sont pas parallèles.

3. Soit PRS un triangle tel que T appartient au côté [PR] et V appartient au côté [PS].

Si $\frac{PT}{PR} = \frac{PV}{PS}$, alors on peut dire que :

- ☐ le triangle PTV est un agrandissement du triangle PRS.
☒ (TV) et (RS) sont parallèles.
☒ le triangle PTV est une réduction du triangle PRS.
☒ $\frac{PT}{PR} = \frac{TV}{RS}$

4. Dans le triangle TRI, A appartient au segment [TR] et B appartient au segment [TI].

On a l'égalité $\frac{TR}{TA} = \frac{TI}{TB}$.

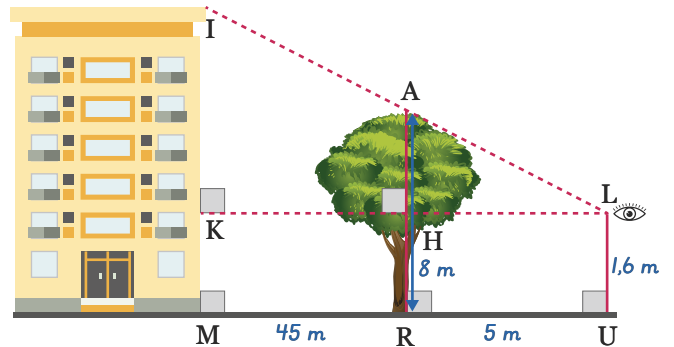
Quelles sont les droites parallèles ?

- ☐ (TR) et (TI).
☐ (TA) et (TB).
☒ (RI) et (AB).
☐ Aucune de ces propositions.

16 [Ch.1 - Mod.4 - Com.4]

Lucie souhaite connaître la hauteur de son immeuble. À 45 mètres de celui-ci se trouve un arbre de 8 mètres de haut. Elle recule de 5 mètres depuis l'arbre afin que son regard soit aligné avec la cime de l'arbre et le haut de l'immeuble. Dans la figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, on a symbolisé la façade de l'immeuble par le segment [IM], l'arbre par le segment [AR] et le regard de Lucie par le point L. On estime que le regard de Lucie se trouve à 1,60 m du sol.

1. Indiquer les différentes mesures, en mètre, sur la figure ci-dessous.



2. Déterminer la hauteur IM de l'immeuble, au dixième de mètre près.

LKI est un triangle tel que A appartient à [IL] et H appartient à [KL]. De plus, on suppose l'immeuble et l'arbre perpendiculaires au sol donc (IK) et (AH) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{LH}{LK} = \frac{LA}{LI} = \frac{AH}{KI}$ d'où $\frac{5}{5+45} = \frac{8-1,6}{KI}$ et donc $KI = \frac{50 \times 6,4}{5} = 64$ m.

Ainsi $IM = IK + KM = 64 + 1,6 = 65,6$ m et donc la hauteur de l'immeuble de Lucie est 65,6 mètres.

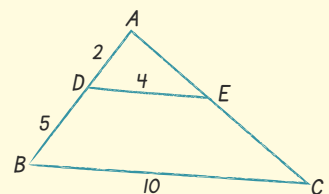
17 COPIE D'ÉLÈVE [Mod.4 - Rais.4 - Rais.5]

En feuilletant le cahier d'exercices de son petit frère, Anas lit une de ses résolutions de problème.

$$\text{On a } \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$\text{donc } \frac{DA}{DB} = \frac{DE}{BC}$$

Ainsi, (DE) et (BC) sont parallèles.

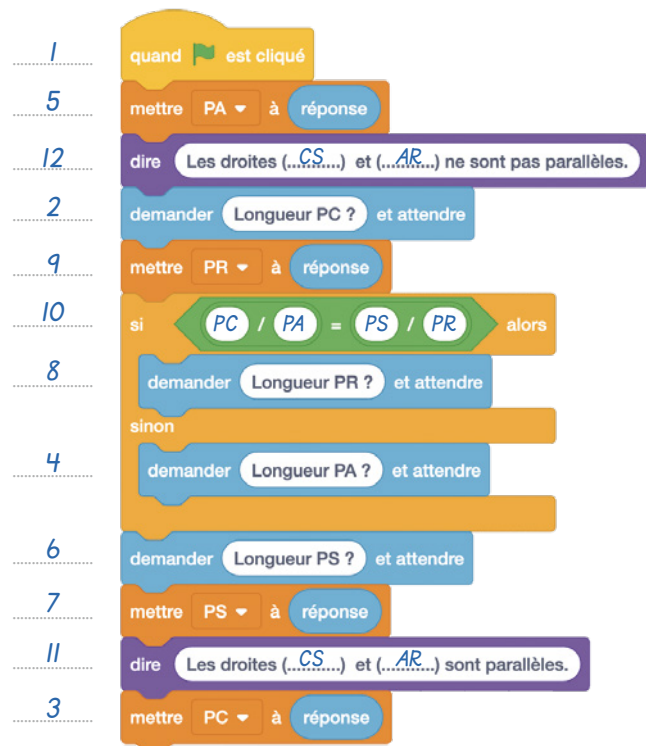


Anas lui affirme que son raisonnement est faux. Pourquoi ?

Anas a commis deux erreurs : premièrement, il a utilisé le quotient $\frac{DA}{DB}$ au lieu du quotient $\frac{DA}{AB} = \frac{2}{7} \neq \frac{4}{10} = \frac{DE}{BC}$, les droites ne sont donc pas parallèles. Deuxièmement, il n'aurait pas pu déduire le parallélisme en comparant ces deux quotients, les deux rapports à comparer étant $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$.

18 [Rais.6]

Voici un programme Scratch dont les instructions ont été mélangées. Le travail porte sur l'étude d'un triangle PAR dans lequel C est un point de [PA] et S est un point de [PR].



1. À quoi sert ce programme ?

Ce programme sert à déterminer si les droites (CS) et (AR) sont parallèles ou non.

2. Compléter l'instruction conditionnelle à l'aide des variables suivantes.



3. Compléter les instructions violettes puis numéroté toutes les instructions afin de les remettre dans l'ordre.

4. Un utilisateur entre les données suivantes : PA = 5, PC = 2, PS = 3 et PR = 6. Que va afficher le programme ?

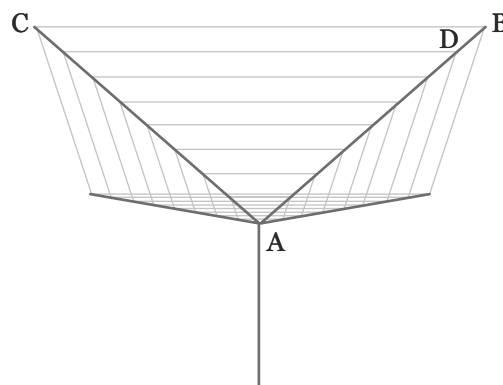
Puisque $\frac{PC}{PA} = \frac{2}{5} = \frac{12}{30}$ et $\frac{PS}{PR} = \frac{3}{6} = \frac{15}{30}$, on en déduit que les quotients $\frac{PC}{PA}$ et $\frac{PS}{PR}$ ne sont pas égaux.

Ainsi, la condition de l'instruction conditionnelle n'est pas vérifiée.

Le programme affichera donc le message : « Les droites (CS) et (AR) ne sont pas parallèles. »

19 [Mod.4 - Rais.3]

Un étendoir à linge en parapluie a une structure composée de quatre triangles identiques au triangle ABC présenté sur la figure ci-dessous. Chaque triangle accueille huit cordes tendues, toutes parallèles et espacées sur la structure d'une longueur BD = 6 cm. On sait de plus que AB = AC = 48 cm et que BC = 64 cm.



Calculer la longueur totale de corde, en mètre, de cet étendoir à linge.

Dans le triangle ABC, les côtés [AB] et [AC], qui mesurent la même longueur, sont chacun partagés en huit segments de même longueur.

Toutes les cordes étant parallèles, d'après le théorème de Thalès on en déduit que les longueurs des cordes sont les suivantes, de bas en haut, de la plus petite à la plus grande : $\frac{1}{8} \times 64 = 8$ cm, $\frac{2}{8} \times 64 = 16$ cm, $\frac{3}{8} \times 64 = 24$ cm, $\frac{4}{8} \times 64 = 32$ cm, $\frac{5}{8} \times 64 = 40$ cm, $\frac{6}{8} \times 64 = 48$ cm et $\frac{7}{8} \times 64 = 56$ cm, la plus grande mesurant 64 cm.

L'étendoir étant constitué de 4 structures identiques, on obtient une longueur de corde égale à : $4 \times (8 + 16 + 24 + 32 + 40 + 48 + 56 + 64) = 1152$ cm, soit 11,52 m.