

Démontrer une égalité de triangles

Définition :

Deux triangles sont dits **égaux** lorsqu'ils sont superposables, autrement dit, lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur et leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Propriétés :

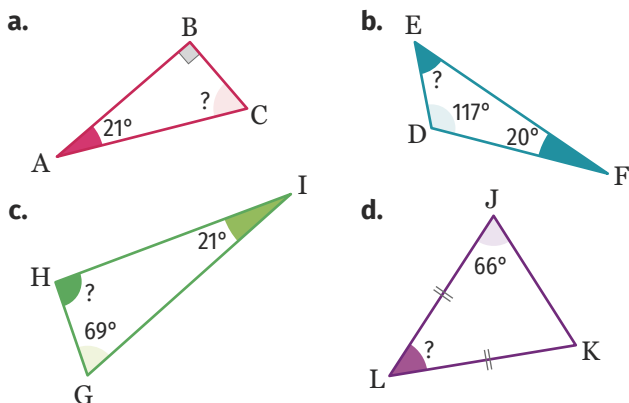
1. Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux de même longueur, alors ils sont égaux.
2. Si deux triangles ont un angle de même mesure situé entre deux côtés deux à deux de même longueur, alors ces deux triangles sont égaux.
3. Si deux triangles ont un côté de même longueur situé entre deux angles deux à deux de même mesure, alors ces deux triangles sont égaux.

➤ Retrouvez un cours complet sur LLS.fr/M4P254.

Les méthodes en vidéo sur LLS.fr/M4EXVideo36.

1 [Cal.4 - Rais.3]

1. Calculer la mesure de l'angle inconnu dans les quatre triangles ci-dessous.



a. $\widehat{ACB} = 180 - (90 + 21) = 69^\circ$

b. $\widehat{DEF} = 180 - (117 + 20) = 43^\circ$

c. $\widehat{GHI} = 180 - (69 + 21) = 90^\circ$

d. Puisque JLK est un triangle isocèle en L , on a donc $\widehat{LKJ} = \widehat{KJL} = 66^\circ$ d'où $\widehat{JLK} = 180 - 2 \times 66 = 48^\circ$.

2. Citer deux triangles ayant leurs angles deux à deux égaux.

Les triangles ACB et GHI ont leurs angles égaux.

3. Ces deux triangles sont-ils égaux ?

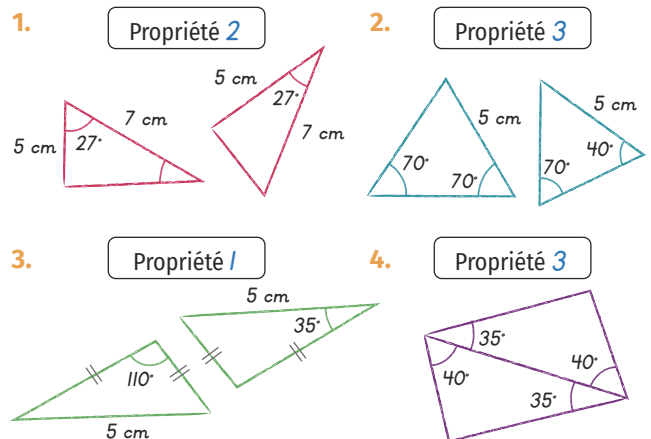
Non, ils ne sont pas superposables, ils ne sont donc pas égaux.

4. Que peut-on en déduire ?

L'égalité des mesures des angles ne suffit pas pour démontrer l'égalité des triangles. Il manque des informations sur au moins une longueur de ces triangles.

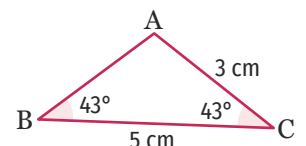
2 [Mod.4 - Rep.5 - Cal.3]

Dans chacun des encadrés ci-dessous, indiquer le numéro de la propriété écrite dans le cours permettant de justifier l'égalité des deux triangles.

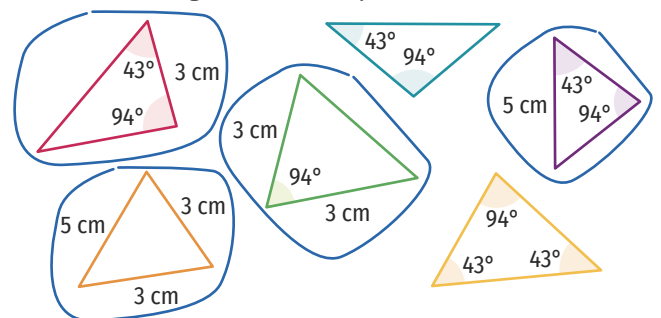


3 [Ch.1 - Mod.4]

Entourer, parmi les différents triangles ci-après, ceux qui sont égaux au triangle ABC .



Attention, les figures ne sont pas à l'échelle.





1. $180 - (47 + 33) = 100$

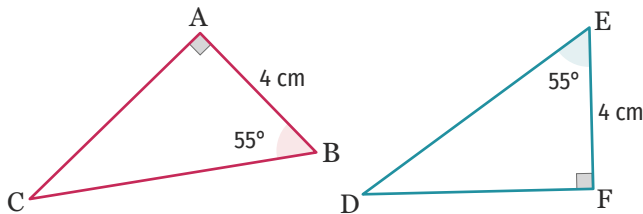
2. $180 - 2 \times 35 = 110$

3. $180 - 85 - 25 = 70$

4. $\frac{(180 - 76)}{2} = 52$

4 [Rais.2 - Rais.4 - Com.4]

Compléter les phrases suivantes pour démontrer que les triangles ABC et DEF sont égaux.



On constate que $AB = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 55^\circ$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 180 - 90 - 55 = 35^\circ$.

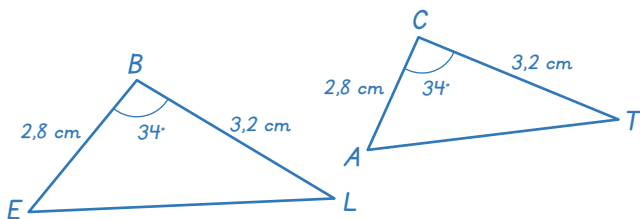
Or, si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure, alors ils sont égaux.

Donc les triangles ABC et DEF sont égaux.

5 [Rais.3 - Rep.6 - Com.4]

Soit BEL et CAT deux triangles tels que $BE = 2,8$ cm, $CA = 2,8$ cm, $CT = 3,2$ cm, $BL = 3,2$ cm et $\widehat{EBL} = \widehat{ACT} = 34^\circ$.

1. Faire une figure à main levée de ces triangles.



2. Démontrer que les triangles BEL et CAT sont égaux.

$BE = CA = 2,8$ cm, $BL = CT = 3,2$ cm et $\widehat{EBL} = \widehat{ACT} = 34^\circ$.

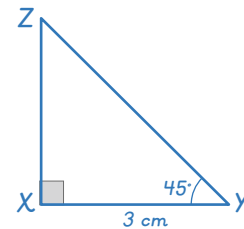
Or, si deux triangles ont un angle de même mesure situé entre deux côtés de même longueur, alors ils sont égaux.

Donc les triangles BEL et CAT sont égaux.

6 [Mod.4 - Rep.6 - Com.4]

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $\widehat{ABC} = 45^\circ$.

1. Tracer un triangle XYZ égal au triangle ABC.



2. Quelle semble être la nature du triangle XYZ ?

XYZ semble être rectangle et isocèle (en X dans notre cas).

3. Démontrer cette conjecture et en déduire la nature du triangle ABC.

Le triangle XYZ est égal à ABC, on a donc $\widehat{YXZ} = 90^\circ$ et $\widehat{XYZ} = 45^\circ$.

D'où $\widehat{XZY} = 180 - (90 + 45) = 45^\circ$.

Le triangle a donc un angle droit et deux angles de même mesure, il est donc isocèle rectangle.

XYZ et ABC étant égaux, ABC est donc aussi un triangle rectangle isocèle.

LE COIN DES EXPERTS

7 Soit A, B, C et D quatre points distincts, C et D se trouvant du même côté de la droite (AB) tels que $\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 40^\circ$, $\widehat{DAC} = \widehat{ACB} = 95^\circ$ et $AB = 15$ cm. Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

Les triangles ABC et ADC ont un côté de même longueur ([AC]) compris entre deux angles de même mesure, donc ils sont égaux.

On a donc $AB = DC$ et $AD = BC$.

Or un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme donc ABCD est un parallélogramme.



Entraînement

Reconnaître et utiliser les propriétés des translations

Définition :

Une **translation** est une transformation qui permet de faire glisser une figure parallèlement à une droite dans un sens donné.

Remarques :

1. Dans une translation, l'image n'est ni retournée ni déformée.
2. Sur une figure, on peut schématiser par une flèche le glissement engendré par une translation.

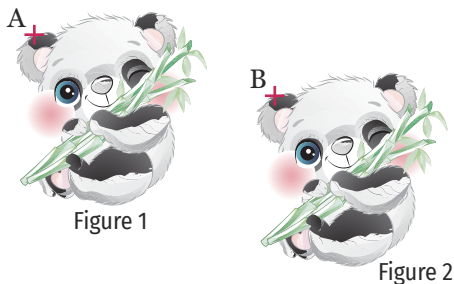
Propriété :

Une figure et son image par translation sont superposables. Ainsi, les longueurs, les mesures d'angles, le parallélisme et les aires sont conservés.

➤ Retrouvez un cours complet sur LLS.fr/M4P256

Les méthodes en vidéo sur LLS.fr/M4EXVideo37

8 [Com.1 - Com.2]

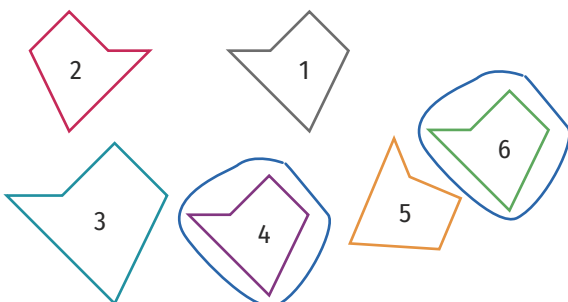


Rayer, dans chaque phrase, les mentions inutiles.

1. La figure 2 est l'image de la figure 1 par la translation qui transforme le point ~~A~~/~~B~~ en ~~A~~/~~B~~.
2. La figure 2 s'obtient en glissant la figure 1 sans la retourner ou la déformer parallèlement à (AB) dans le sens de ~~A~~/~~B~~ vers ~~A~~/~~B~~ et sur la distance AB.
3. La figure 1 est l'image de la figure 2 par la translation qui transforme le point ~~A~~/~~B~~ en ~~A~~/~~B~~.
4. La figure 1 s'obtient en glissant la figure 2 sans la retourner ou la déformer parallèlement à (AB) dans le sens de ~~A~~/~~B~~ vers ~~A~~/~~B~~ et sur la distance AB.

9 [Mod.4]

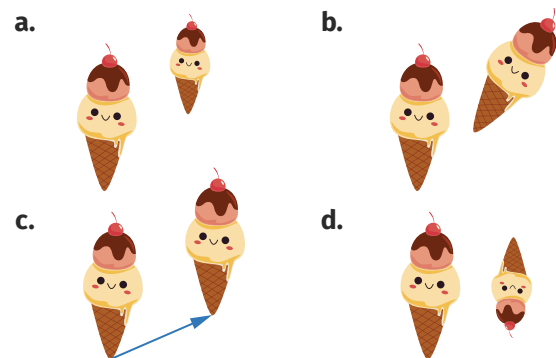
Parmi les six figures suivantes, entourer celles qui sont obtenues par une translation de la figure 1.



10 [Mod.4 - Com.1]

Dans les cas suivants, les figures peuvent être l'image l'une de l'autre par une translation ou obtenues par une autre transformation.

1. Compléter le tableau ci-dessous en cochant les bonnes informations.



Cas	Les figures sont-elles obtenues par translation ? Si non, pourquoi ?	
	Oui	Non
a.	☐	☐ Retournement ☒ Déformation
b.	☐	☒ Retournement ☐ Déformation
c.	☒	☐ Retournement ☐ Déformation
d.	☐	☒ Retournement ☒ Déformation

2. Dans le(s) cas où la transformation est bien une translation, représenter par une flèche le déplacement permettant de passer d'une figure à l'autre.



Calcul mental

1. $2 + (4^2 + 1) = 19$

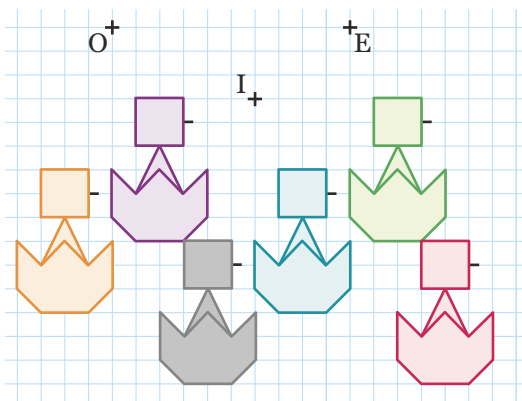
2. $2 - (4^2 + 1) = -15$

3. $2 \times (4^2 + 1) = 34$

4. $2 \times 4^2 + 1 = 33$

11 [Mod.4 - Com.1] ●●●●

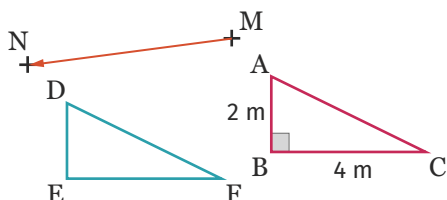
Compléter les phrases suivantes.



- Le poussin *vert* est l'image du poussin violet par la translation qui transforme O en E.
- Le poussin bleu est l'image du poussin *vert* par la translation qui transforme E en I.
- Le poussin *bleu* est l'image du poussin rose par la translation qui transforme I en O.
- Le poussin orange est l'image du poussin bleu par la translation qui transforme E en O.
- Le poussin bleu est l'image du poussin violet par la translation qui transforme O en I.

12 [Rep.5 - Cal.4 - Com.4] ●●●●

Le triangle DEF est l'image du triangle rectangle ABC par la translation qui transforme M en N.

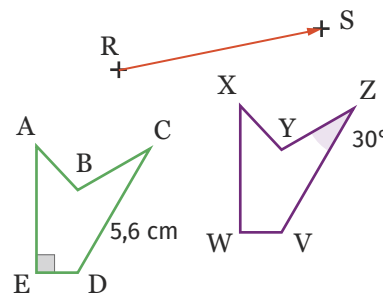


- Quelle est la nature du triangle DEF ? Justifier.
*La translation conserve les mesures d'angles.
Donc DEF est un triangle rectangle.*
- Déterminer l'aire du triangle ABC puis en déduire l'aire du triangle DEF.
$$\text{Aire}_{ABC} = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \text{ m}^2.$$

*Les triangles étant égaux, ils ont la même aire.
L'aire de DEF est donc aussi égale à 4 m².*

13 [Mod.5 - Rais.4 - Com.4] ●●●●

Le polygone VWXYZ est l'image de ABCDE par la translation qui transforme le point R en S.



Répondre aux questions suivantes en justifiant.

- Quelle est la longueur du segment [VZ] ?
[VZ] est l'image de [CD] par la translation qui transforme le point R en S. Or une translation conserve les longueurs des côtés d'un polygone, donc [VZ] mesure 5,6 cm.
- Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{XWV}$?
 $\widehat{XWV}$ est l'image de $\widehat{AED}$ par la translation qui transforme le point R en S. Or une translation conserve les mesures d'angles donc $\widehat{XWV}$ mesure 90°.
- Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$?
 $\widehat{YZV}$ est l'image de $\widehat{BCD}$ par la translation qui transforme le point R en S. Or une translation conserve les mesures d'angles donc $\widehat{BCD}$ mesure 30°.

LE COIN DES EXPERTS

- 14 Pour stocker le miel, les abeilles réalisent un pavage hexagonal sur les deux faces d'un cadre. Chaque face d'un cadre est constituée de 4 346 alvéoles, les alvéoles étant les hexagones qui constituent le pavage. Sachant qu'une alvéole peut contenir environ 269 mm³ de miel, quelle quantité théorique de miel, en litre, un apiculteur peut-il espérer récolter par cadre ?



Coup de pouce : 1 L = 1 dm³

Les deux faces d'un cadre sont constituées de $4\,346 \times 2 = 8\,692$ alvéoles. Un apiculteur peut donc espérer récolter $269 \times 8\,692 = 2\,338\,148 \text{ mm}^3$, soit environ 2,3 L de miel par cadre.



Entraînement

Tracer des translations

Propriétés :

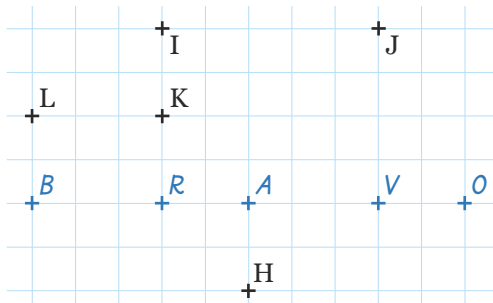
1. L'image d'un point par une translation est un point.
2. L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle à la droite d'origine.
3. L'image d'un segment $[AB]$ par une translation est un segment de même longueur porté par une droite parallèle à (AB) .
4. L'image d'un cercle par une translation est un cercle.

➤ Retrouvez un cours complet sur LLS.fr/M4P256.



Les méthodes en vidéo sur LLS.fr/M4EXVideo37.

15 [Rep.2 - Mod.4] ● ● ●



1. Placer les points suivants.

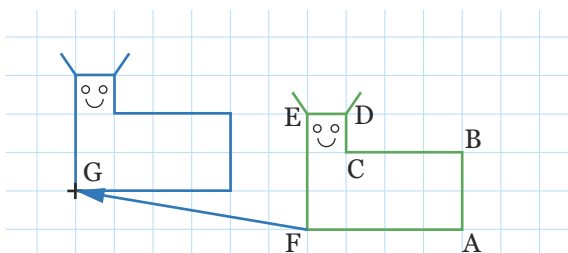
- a. Le point O, image de H par la translation qui transforme K en J.
- b. Le point A, image de O par la translation qui transforme J en I.
- c. Le point B, image de L par la translation qui transforme I en K.
- d. Le point V, image de H par la translation qui transforme L en I.
- e. Le point R, image de B par l'enchaînement des translations qui transforment L en I puis I en K.

2. Quel mot voit-on apparaître ?

On voit apparaître le mot « BRAVO ».

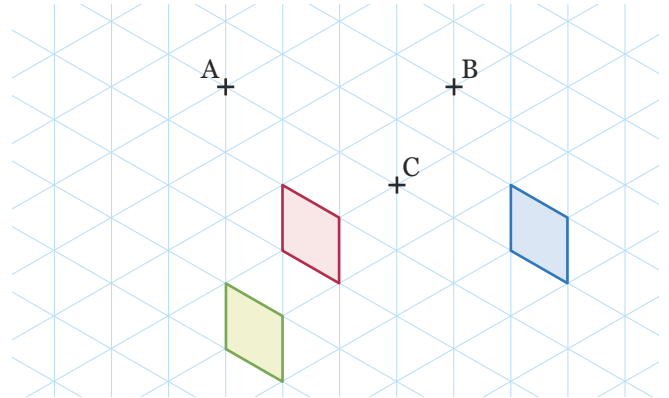
16 [Rep.2 - Rep.6 - Mod.4] ● ● ●

1. Sur la figure ci-dessous, schématiser par une flèche la translation qui transforme le point F en G.



2. Construire l'image de la figure ABCDEF par cette translation.

17 [Rep.2 - Mod.4] ● ● ●



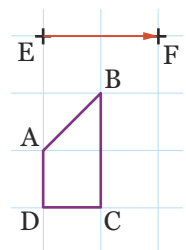
1. Construire en bleu l'image du motif rouge par la translation qui transforme A en B.
2. Construire en vert l'image du motif rouge par la translation qui transforme B en C.

18 COPIE D'ÉLÈVE [Rep.2 - Mod.4 - Rep.6] ● ● ●

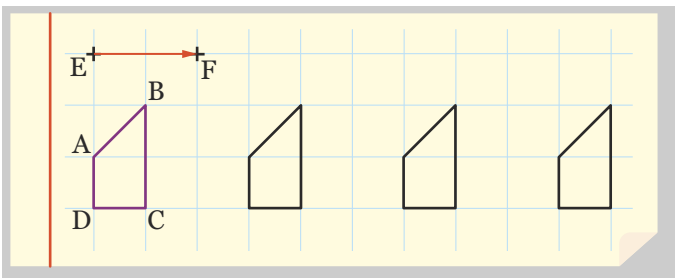


Une enseignante distribue le problème suivant.

« Réaliser une frise en appliquant à cette figure quatre fois la translation qui transforme le point E en F. »



Adam a obtenu la frise suivante.



Adam a commis deux erreurs. Lesquelles ?

Adam n'a appliqué que trois fois la translation à ABCD au lieu de quatre. De plus, il se trompe d'un carreau en appliquant la translation qui transforme le point E en F.



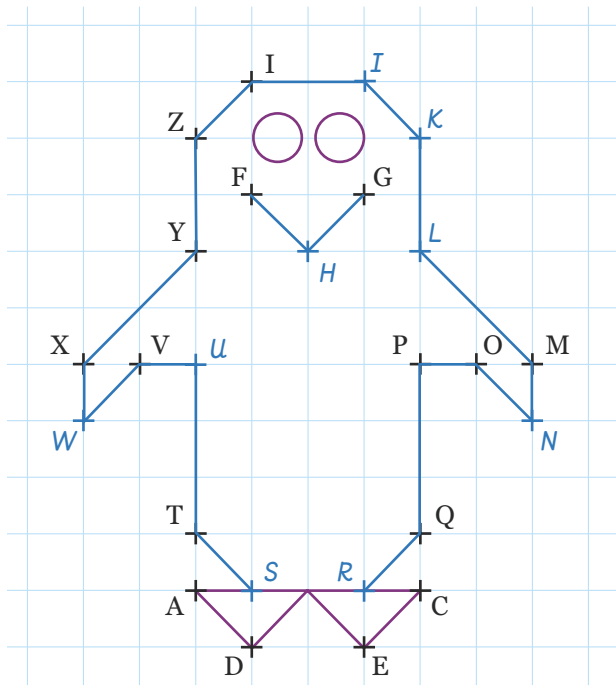
1. $4 \times (2 + 10) \div 2 = 24$

2. $4 \times 2 + 10 \div 2 = 13$

3. $(4 \times 2 + 10) \div 2 = 9$

4. $4 \times (2 + 10 \div 2) = 28$

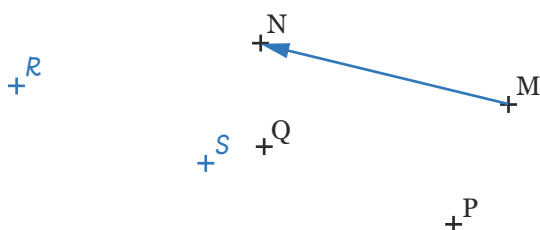
19 [Rep.2 - Mod.4] ●●●●



1. Sur la figure ci-dessus, placer les points suivants.
 - a. Les points H, R et W, images respectives des points G, Q et V par la translation qui transforme C en E.
 - b. Le point J, image du point I par la translation qui transforme F en G.
 - c. Les points K, S et N, images respectives des points J, T et O par la translation qui transforme A en D.
 - d. Le point L, image du point K par la translation qui transforme Z en Y.
 - e. Le point U, image du point T par la translation qui transforme Q en P.
2. Tracer les segments [FH] et [HG].
3. Tracer le polygone IJKLMNOPQRSTUWXYZ.

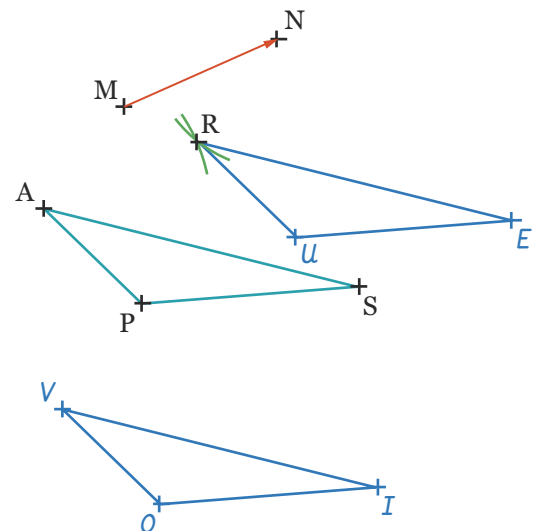
20 [Rep.2 - Mod.4] ●●●●

Construire R et S, images respectives des points Q et P par la translation qui transforme M en N.



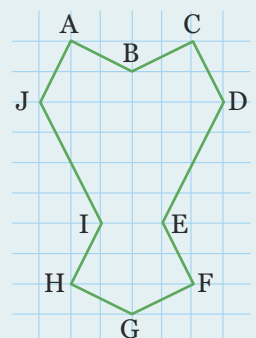
21 [Rep.2 - Rep.6 - Mod.4] ●●●●

Hugo a débuté ci-dessous le tracé du triangle RUE, image de PAS par la translation qui transforme M en N. Terminer son tracé, puis tracer VOL, image de PAS par la translation qui transforme M en P.



LE COIN DES EXPERTS

22 Est-il possible de paver le plan avec le motif ci-contre en utilisant seulement des translations ? Si oui, citer les translations qui permettront de réaliser ce pavage.



Oui c'est possible, en utilisant deux translations : la translation qui transforme le point J en E et celle qui transforme le point I en D.



23 QCM [Mod.4 - Mod.5 - Rais.1] ●●●●●

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. Un triangle égal au triangle ABC tel que $AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 30^\circ$ a nécessairement :

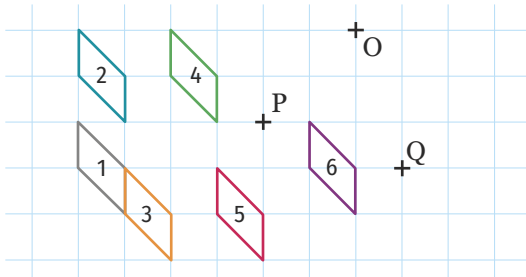
- ☐ un côté égal à 9 cm. ☒ un côté égal à 5 cm.
☐ un angle égal à 30° . ☐ un angle égal à 90° .

2. Un triangle égal au triangle DEF rectangle en F tel que $DE = 6$ cm, $\widehat{DEF} = 40^\circ$ a nécessairement :

- ☐ un côté égal à 6 cm. ☒ un angle égal à 50° .
☒ un angle égal à 40° . ☐ un angle égal à 30° .

3. La figure 5 est l'image de la figure 4 par la translation qui transforme :

- ☐ Q en O. ☒ la figure 2 en la figure 3.
☒ O en Q. ☐ P en O.

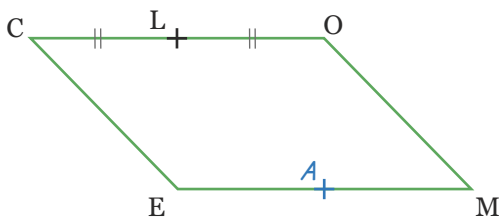


4. L'image d'un hexagone régulier de côté 5 cm par une translation :

- ☒ est un hexagone régulier.
☐ a une aire inférieure à l'hexagone de départ.
☒ a un périmètre de 30 cm.

24 [Mod.4 - Rep.6 - Com.4] ●●●●●

Soit $COME$ un parallélogramme et L le milieu de $[CO]$.



1. Quelle est l'image de $[CO]$ par la translation qui transforme O en M ?

L'image de $[CO]$ par la translation qui transforme O en M est $[EM]$.

2. Sur la figure ci-dessus, construire le point A , image du point L par la translation qui transforme O en M .

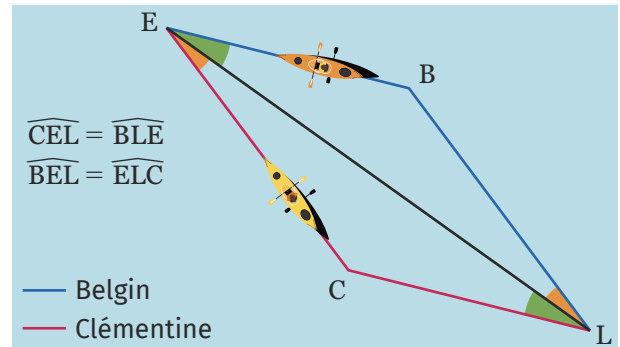
3. Que peut-on dire du point A ?

A est le milieu du segment $[EM]$.

25 [Rep.5 - Rais.3 - Mod.4 - Com.4] ●●●●●

Voici le parcours de la descente en canoë-kayak de Belgin et Clémentine lors d'une course.

Belgin pense que la course n'est pas équitable car elle doit parcourir une distance supérieure à celle de Clémentine.



Belgin a-t-elle raison ?

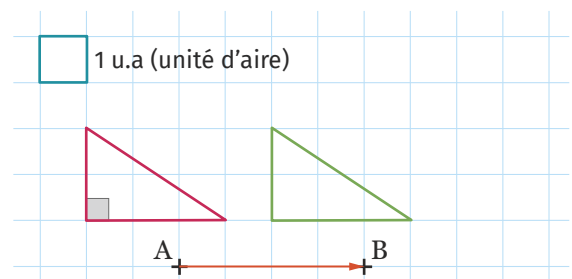
D'après la figure :

- $\widehat{BLE} = \widehat{CEL}$;
- $\widehat{BEL} = \widehat{CLE}$;
- $[EL]$ est un côté commun aux triangles CLE et BEL .

Or, si deux triangles ont un côté de même longueur situé entre deux angles de même mesure, alors les triangles sont égaux. CLE et BEL sont donc égaux et donc $EB + BL = EC + CL$. Belgin a donc tort.

26 [Mod.4 - Rep.6 - Cal.4 - Com.4] ●●●●●

1. Sur la figure ci-dessous, tracer en vert l'image du triangle rose par la translation qui transforme A en B .



2. Les triangles rose et vert sont-ils égaux ? Justifier.

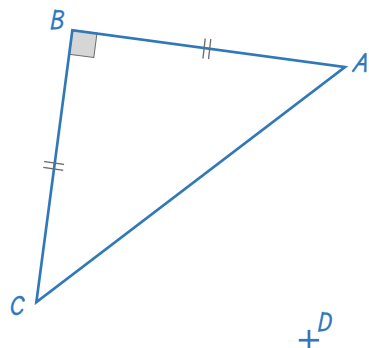
La translation conserve les longueurs et mesures d'angles donc les triangles sont égaux.

3. Déterminer l'aire du triangle vert.

L'aire du triangle vert est $\frac{2 \times 3}{2} = 3$ u.a.

27 [Mod.4 - Rais.3 - Rais.4] ●●●●

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en B et D l'image du point C par la translation qui transforme B en A . Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.



D est l'image de C par la translation qui transforme le point B en A .

D'après la définition de la translation, on a $(CD) \parallel (BA)$ et $CD = AB$.

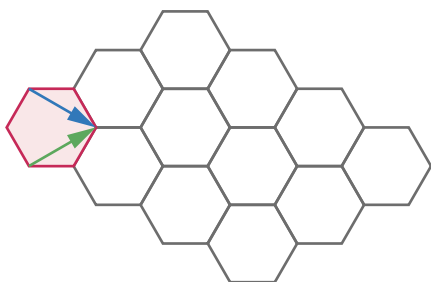
$ABCD$ est donc un quadrilatère admettant deux côtés opposés parallèles et de même longueur : $ABCD$ est un parallélogramme.

De plus, $ABCD$ admet un angle droit en B et $BC = BA$.

Ce parallélogramme est donc un carré.

28 [Mod.4 - Cal.4] ●●●●

Marie a réalisé le pavage ci-dessous à partir de l'hexagone régulier ci-contre d'aire $2,6 \text{ cm}^2$.



1. Sur la figure ci-dessus, tracer deux flèches représentant deux des translations utilisées pour réaliser le pavage.

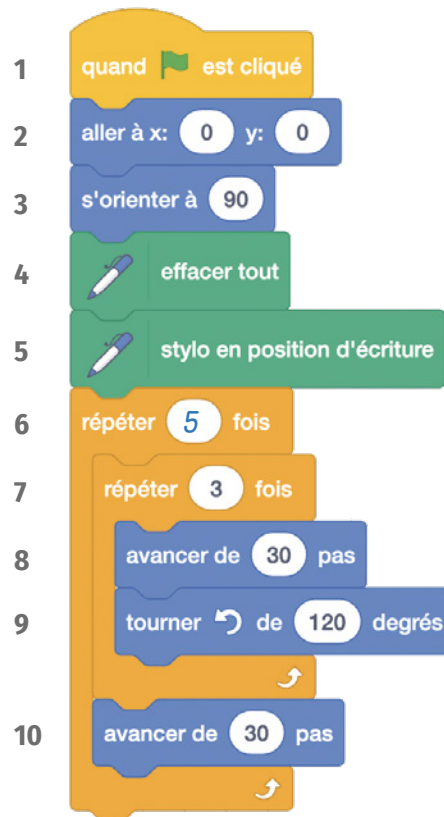
2. Quelle est la surface totale occupée par ce pavage hexagonal ?

On sait que la translation conserve les aires.

Le pavage est donc recouvert de douze hexagones d'aire $2,6 \text{ cm}^2$ soit une surface totale de $12 \times 2,6 = 31,2 \text{ cm}^2$.

29 [Rais.6] ●●●●

On considère le programme Scratch ci-dessous.



1. Que permettent de tracer les lignes 7 à 9 du programme ? Préciser les caractéristiques du dessin obtenu.

Les lignes 7 à 9 permettent de tracer un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 30 pixels.

2. Compléter la ligne 6 pour obtenir la frise ci-dessous.



3. Comment modifier ce programme pour obtenir la frise ci-dessous ?



Il faut modifier la ligne 10 ainsi : « avancer de 60 pas ».