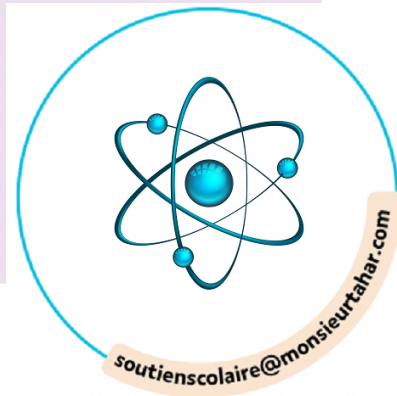


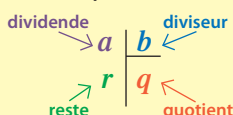


1

Connaitre la division euclidienne

► Effectuer la **division euclidienne** de a par b , c'est déterminer le quotient q et le reste r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b.$$



► Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0, on a : $a = b \times q$.

On dit que a est un **multiple de b** , b est un **diviseur de a** ou encore a est **divisible par b** .

- 1 Compléter avec des nombres et les mots :
diviseur • dividende • quotient • reste

a. $201 \div 9$ $Q=22; R=3$

201 est le **dividende**,

9 est le **diviseur**,

22 est le **quotient**,

3 est le **reste** et on a

$$201 = 9 \times 22 + 3 \text{ (avec } 3 < 9 \text{)}.$$

b. $394 = 15 \times 25 + 19$.

394 est le **dividende**, **25** est le diviseur,

15 est le quotient et **19** est le reste

(on a bien **19** < **25**).

- 2 Compléter.

Dans la division euclidienne de 3 512 par 11,

le quotient est **319** et le reste est **3**. On a

$$3\,512 = 11 \times 319 + 3 \text{ avec } 3 < 11.$$

- 3 Quels sont les restes possibles d'une division euclidienne par 7 ?

Le reste est strictement inférieur au diviseur 7, ce peut donc être 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

4 MODE EXPERT

Le quotient d'une division euclidienne est 15, le reste est 2 et le dividende est 182. Quel est le diviseur ?

Soit d le diviseur. On a : $182 = 15 \times d + 2$.

$$\text{Donc } 15 \times d = 180, \text{ d'où } d = 180 \div 15 = 12.$$

- 5 Compléter avec des nombres et les mots :
multiple de • diviseur de • divisible par

a. $700 \div 25$ $Q=28; R=0$

700 est un **multiple de** de 25, **25 (ou 28)** est un diviseur de 700.

b. $2\,394 = 126 \times 19$

2 394 est **divisible par** 126 et 19.

126 est un **diviseur de** de 2 394.

c. 1 est un **diviseur de** tous les entiers.

- 6 Vrai ou faux ?

a. 152 est divisible par 10 : **Faux**

b. 152 est un multiple de 4 : **Vrai**

c. 152 est un diviseur de 304 : **Vrai**

d. 152 est divisible par 152 : **Vrai**

e. 152 est divisible par 0 : **Faux**

- 7 Le nombre 413 est-il divisible par 19 ?

Le reste de la division euclidienne de 413 par 19 est 14, donc 413 n'est pas divisible par 19.

8 MODE EXPERT

Sarah affirme : « Si un nombre entier est divisible par 3 et par 6, il est aussi forcément divisible par 18 (3×6). »

Sarah a-t-elle raison ?

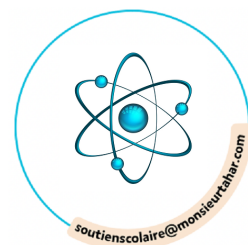
Sarah a tort, il suffit de donner un contre-exemple :

6 est divisible par 3 et par 6, mais pas par 18.



2

Déterminer les diviseurs d'un nombre entier



- Un nombre entier est **divisible** par :
- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
 - 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
 - 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
 - 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
 - 10 si son chiffre des unités est 0.

9 Compléter le tableau par Oui ou Non.

Est divisible par	2	3	5	9	10
1 521	Non	Oui	Non	Oui	Non
3 450	Oui	Oui	Oui	Non	Oui
9 972	Oui	Oui	Non	Oui	Non

10 Déterminer tous les nombres entiers compris entre 200 et 250, divisibles à la fois par 3 et par 5 mais pas par 9.

210 et 240

11 Simplifier autant que possible l'écriture des fractions en utilisant les critères de divisibilité.

a. $\frac{51}{75} = \frac{3 \times 17}{3 \times 25} = \frac{17}{25}$

b. $\frac{315}{135} = \frac{9 \times 5 \times 7}{9 \times 5 \times 3} = \frac{7}{3}$

12 **MODE EXPERT** Soit $N = ?345?$ un nombre entier à cinq chiffres dont deux sont inconnus. Quelles sont toutes les valeurs possibles de N sachant qu'il est divisible par 9 et par 5 ?

63 450 et 13 455

- Pour déterminer si un nombre b est **diviseur d'un nombre a** , on cherche si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

13 17 et 19 sont-ils des diviseurs de 408 ?

Le reste de la division

euclidienne de 408 par 17 est

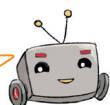
0 ($408 = 17 \times 24$) mais vaut 9

dans la division par 19

($408 = 19 \times 21 + 9$). 408 est

donc divisible par 17, mais pas par 19.

La méthode de la division permet d'obtenir 2 diviseurs à chaque test positif.



14 Une calculatrice affiche 224 ÷ 7 Q=32 R=0

En déduire deux diviseurs de 224.

$224 = 7 \times 32$ donc 7 et 32 sont des diviseurs de 224.

15 Chacun de ces nombres est-il divisible par 23 ? Si oui, en déduire un deuxième diviseur.

a. 1 219 : $1\,219 = 23 \times 53$ donc 23 et 53 sont deux diviseurs de 1 219.

b. 1 040 : $1\,040 = 23 \times 45 + 5$ donc 23 n'est pas un diviseur de 1 040.

- Pour **déterminer tous les diviseurs** d'un entier naturel N , on teste la divisibilité de N par 2, 3, 4 etc. jusqu'au plus grand nombre entier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

16 On veut déterminer tous les diviseurs de 70.

1. $\sqrt{70} \approx 8,4$; on teste donc tous les diviseurs de 70 jusqu'à 8.

2. Les diviseurs de 70 sont : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70

17 On veut déterminer tous les diviseurs de 201.

1. $\sqrt{201} \approx 14,2$; on teste donc tous les diviseurs de 201 jusqu'à 14.

2. Les diviseurs de 201 sont : 1, 3, 67, 201.

18 **MODE EXPERT** Deux entiers naturels sont divisibles par 13 ; leur produit vaut 4 732. Quels sont ces deux nombres ? Donner toutes les possibilités.

$4\,732 = 13 \times 13 \times 28$

$28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$

Les différentes possibilités sont donc :

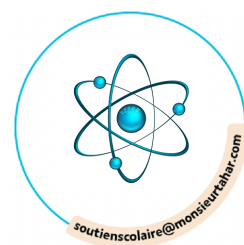
• $N_1 = 13 \times 1 = 13$ et $N_2 = 13 \times 28 = 364$

• $N_1 = 13 \times 2 = 26$ et $N_2 = 13 \times 14 = 182$

• $N_1 = 13 \times 4 = 52$ et $N_2 = 13 \times 7 = 91$



3 Reconnaître un nombre premier



► Un **nombre premier** est un entier qui admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

► Pour prouver qu'un nombre **n'est pas premier**, il suffit donc de trouver un diviseur autre que 1 et lui-même.

19 Vrai ou faux ? Justifier.

a. 1 est un nombre premier. **Faux, il n'admet qu'un seul diviseur.**

b. Il existe six nombres premiers inférieurs à 20. **Faux, il y en a huit : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19.**

c. Tous les nombres premiers sont impairs. **Faux, 2 est un nombre premier pair.**

d. Le produit de deux nombres premiers est toujours un nombre premier.

Faux : 4 est le produit de deux nombres premiers (2×2) mais n'est pas premier.

20 Entourer les nombres premiers :

7 12 20 23 25 29

21 Justifier que 135 n'est pas un nombre premier.

Le chiffre des unités de 135 est 5, donc 135 est divisible par 5. 135 admet au moins un diviseur autre que 1 et lui-même, il n'est donc pas premier.

22 Justifier que 1 689 n'est pas un nombre premier.

La somme des chiffres de ce nombre est 24, qui est divisible par 3. 1 689 est donc divisible par 3, il n'est donc pas premier.

23 Un seul de ces nombres est premier, lequel ? Justifier.

80 123 643 3 575 9 099

80 et 3 575 sont divisibles par 5, ils ne sont donc pas premiers.

123 et 9 099 sont divisibles par 3, ils ne sont donc pas premiers.

Le nombre premier est donc 643.

24 Je suis un nombre premier compris entre 70 et 80, tel que le nombre obtenu en permutant mes deux chiffres est encore premier. Qui suis-je ? Donner toutes les réponses possibles.

71, 73 ou 79

25 Quel est le plus petit nombre premier à trois chiffres ?

101

► Pour prouver qu'un nombre est premier, il suffit de **tester sa divisibilité** par 2, 3, 4 etc. jusqu'au plus grand entier inférieur ou égal à sa racine carrée.

26 Prouver que 113 est un nombre premier.

$\sqrt{113} \approx 10,6$; on teste donc tous les diviseurs de 113 jusqu'à 10.

113 n'est pas divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Il est donc premier.

27 Prouver que 251 est un nombre premier.

$\sqrt{251} \approx 15,8$; on teste donc tous les diviseurs de 251 jusqu'à 15.

251 n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et 15 inclus, il est donc premier.

28 **MODE EXPERT** Lila dispose de 163 jetons qu'elle veut disposer pour former un rectangle d'au moins deux lignes et deux colonnes. Prouver que c'est impossible.



$\sqrt{163} \approx 12,7$

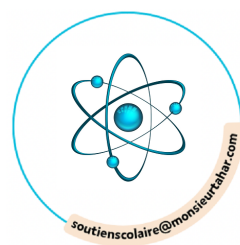
163 n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et 12 inclus, il est donc premier.

Sa seule décomposition est donc $163 = 1 \times 163$.

On ne peut pas former le rectangle souhaité.



Décomposer un entier en produit de facteurs premiers



► Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer de façon unique comme **produit de nombres premiers** (si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).

29 Parmi les décompositions suivantes de 220, entourer celle qui est sa décomposition en produit de facteurs premiers.

4×55

$4 \times 5 \times 11$

$2 \times 2 \times 5 \times 11$

30 Voici trois nombres décomposés en produits de facteurs premiers. Quels sont ces nombres ?

$A = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$

$B = 2 \times 7 \times 11 \times 13^3 = 338\,338$

► Pour obtenir la **décomposition en facteurs premiers** d'un nombre, on peut écrire ce nombre sous forme d'un produit, puis recommencer avec chaque facteur, jusqu'à n'obtenir que des nombres premiers.

$90 = 9 \times 10 = 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

31 Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

$a. 12 = 3 \times 4 = 3 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 3$

$b. 50 = 5 \times 10 = 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 5^2$

$c. 80 = 4 \times 20 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5$

32 Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

$a. 500 = 5 \times 100 = 5 \times 5 \times 20$

$= 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^3$

$b. 720 = 8 \times 9 \times 10 = 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5$

$= 2^4 \times 3^2 \times 5$

► Pour obtenir la décomposition en facteurs premiers d'un nombre, on peut :

- trouver **son plus petit diviseur premier** ;
- calculer **le quotient obtenu** ;
- recommencer avec le quotient trouvé jusqu'à obtenir 1.

5	7	2	2
2	8	6	2
1	4	3	1 1
1	3	1	3
1			

$572 = 2^2 \times 11 \times 13$

33 Décomposer 52 et 1 653 en produit de facteurs premiers.

5	2	2
2	6	2
1	3	1 3
1		

$52 = 2^2 \times 13$

1	6	5	3	3
	5	5	1	1 9
		2	9	2 9
			1	

$1\,653 = 3 \times 19 \times 29$

34 Décomposer 7 406 et 71 687 en produit de facteurs premiers.

7	4	0	6	2
	3	7	0	3 7
	5	2	9	2 3
		2	3	2 3
			1	

$7\,406 = 2 \times 7 \times 23^2$

7	1	6	8	7	7
1	0	2	4	1	7
	1	4	6	3	7
		2	0	9	1 1
			1	9	1 9
				1	

$71\,687 = 7^3 \times 11 \times 19$

► La décomposition en facteurs premiers d'un nombre permet d'obtenir les **diviseurs** de ce nombre.

35 Décomposer 231 en produit de facteurs premiers, et en déduire tous ses diviseurs.

$231 = 3 \times 7 \times 11.$

Les diviseurs de 231 sont : 1 ; 231 ; 3 ; 7 ; 11 ; $3 \times 7 = 21$;

$3 \times 11 = 33$ et $7 \times 11 = 77.$

36 **MODE EXPERT** 1. Décomposer 1 287 et 1 815 en produits de facteurs premiers.

$1\,287 = 3^2 \times 11 \times 13$

$1\,815 = 3 \times 5 \times 11^2$

2. Simplifier autant que possible $\frac{1\,287}{1\,815}$

$\frac{1\,287}{1\,815} = \frac{3^2 \times 11 \times 13}{3 \times 5 \times 11^2} = \frac{3 \times 13}{5 \times 11} = \frac{39}{55}$

3. Décomposer $1\,287 \times 1\,815$ en produit de facteurs premiers.

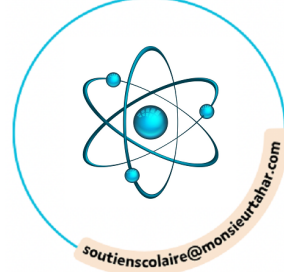
$1\,287 \times 1\,815 = 3^2 \times 11 \times 13 \times 3 \times 5 \times 11^2$

$= 3^3 \times 5 \times 11^3 \times 13$



5

Démontrer avec les nombres entiers



► Pour démontrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un **contre-exemple**.

37 Tom affirme : « La somme de deux nombres premiers est toujours un nombre premier ». Démontrer que Tom a tort.

Contre-exemple : 3 et 5 sont deux nombres premiers, mais $3 + 5 = 8$ n'est pas premier.

38 Chaima dit : « Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 6, alors ce nombre est divisible par 6 ». Démontrer que Chaima a tort.

Contre-exemple : 51 n'est pas divisible par 6 et pourtant $5 + 1 = 6$ est divisible par 6.

39 **MODE EXPERT** Démontrer que si n est un nombre entier naturel, $n^2 - n + 11$ n'est pas toujours un nombre premier.

Contre-exemple : si $n = 11$, $11^2 - 11 + 11 = 121$ n'est pas premier.

► Tout **multiple** de 5 peut s'écrire sous la forme $5n$ (où n est un entier naturel).
De même, un nombre **divisible** par 7 peut s'écrire $7n$; un nombre **pair**, $2n$; etc.

40 Démontrer que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.

Soient $5n$ et $5m$ les écritures des deux multiples de 5 (n et m entiers naturels).

$5n + 5m = 5(n + m)$
 $n + m$ est un entier, donc $5n + 5m$ est un multiple de 5.

41 1. n désigne un nombre entier. Comment peut-on écrire l'entier qui le précède et l'entier qui le suit ?

$n - 1$ et $n + 1$

2. Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

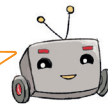
Soient $n - 1$, n et $n + 1$ trois entiers consécutifs.

$n - 1 + n + n + 1 = 3n$, avec n entier naturel, c'est donc bien un multiple de 3.

42 **MODE EXPERT** Démontrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Soient $2n$ et $2m + 1$
un nombre pair et un nombre
impair (avec n et m entiers).

Un nombre impair s'écrit $2m + 1$, avec m entier naturel.



$2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$
qui est donc bien un nombre impair.

43 **MODE EXPERT** Soit N un entier naturel à trois chiffres, avec u comme chiffre des unités, d des dizaines et c des centaines.

1. Compléter : $N = 100c + 10d + u$

2. Démontrer que si le nombre formé par les deux derniers chiffres de N est divisible par 4, alors N est aussi divisible par 4.

$10d + u$ est divisible par 4, donc il s'écrit $4k$ (k entier).

On a alors $N = 4 \times 25c + 4k = 4(25c + k)$.

$25c + k$ est entier, donc N est bien divisible par 4.

► Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les nombres entiers, on peut prouver qu'elle est vraie pour les nombres pairs puis pour les nombres impairs (c'est un raisonnement par **disjonction de cas**).

44 **MODE EXPERT** On veut démontrer que, quel que soit a un entier naturel, $(a + 1)(a + 4)$ est pair.

1. Démontrer l'affirmation dans le cas où a est pair.

$(a + 1)(a + 4) = (2n + 1)(2n + 4) = 4n^2 + 8n + 2n + 4$
 $= 4n^2 + 10n + 4 = 2(2n^2 + 5n + 2)$

C'est donc bien un nombre pair.

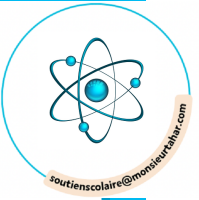
2. Démontrer l'affirmation dans le cas où a est impair.

$(a + 1)(a + 4) = (2m + 1 + 1)(2m + 1 + 4)$
 $= (2m + 2)(2m + 5) = 4m^2 + 10m + 4m + 10$
 $= 4m^2 + 14m + 10 = 2(2m^2 + 7m + 5)$

C'est donc bien un nombre pair.

3. Conclure.

L'affirmation est vraie pour tout nombre entier.



45 Parcours ceinture jaune

- Déterminer les multiples de 8 inférieurs à 20.
0 ; 8 ; 16
- Déterminer tous les diviseurs de 8. 1 ; 2 ; 4 ; 8
- Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de 60 par 8 ? quotient : 7 ; reste : 4
- 1 639 est-il divisible par 9 ? Non
- Lequel de ces deux nombres n'est pas premier : 2 895 ; 2 897 ? 2 895
- Décomposer 35 en produit de facteurs premiers. 5×7
- Quelle expression littérale représente un multiple de 3 ? $3n$ (n entier)

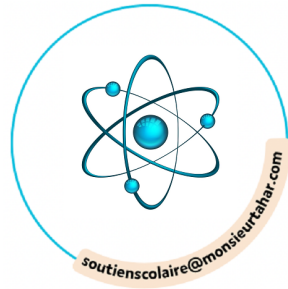
46 Parcours ceinture verte

- Déterminer les multiples de 32 compris entre 60 et 130. 64 ; 96 ; 128
- Quels sont tous les diviseurs de 20 ? 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20
- Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de 150 par 12 ? quotient : 12 ; reste : 6
- 6 975 est-il divisible par 5 et par 9 ? Oui
- Tous les nombres premiers sont-ils impairs ? Non
- Décomposer 58 en produit de facteurs premiers. 2×29
- Décomposer 70 en produit de facteurs premiers. $2 \times 5 \times 7$
- Quelle expression littérale représente un nombre impair ? $2n + 1$ (n entier)

47 Parcours ceinture noire

- Quel est le plus petit multiple commun de 6 et de 9 ? 18
- Quel est, sans poser la division, le reste de la division euclidienne de 1 814 par 18 ? 14
- Quels sont tous les diviseurs de 56 ? 1 ; 2 ; 7 ; 8 ; 28 ; 56
- Dans la liste suivante, un seul nombre est premier, lequel ? 52 ; 76 ; 17 ; 21 ; 35 17
- On donne $588 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. En déduire le plus grand diviseur commun de ces deux nombres. 30
- On donne $588 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. En déduire le plus petit multiple commun de ces deux nombres. 900
- Quelle expression littérale représente la somme d'un multiple de 7 et d'un multiple de 8 ? $7n + 8m$ (n et m entiers)

Problèmes



48 Œufs en boîte

Calculer

Cette semaine, les poules de Lou ont pondu 287 œufs.

1. Combien de boîtes de 12 œufs faut-il au minimum pour ranger ces œufs ?

$287 = 23 \times 12 + 11$. Il faut 24 boîtes.

2. Combien d'œufs manque-t-il pour remplir toutes les boîtes ?

La dernière boîte contient 11 œufs, il manque 1 œuf.

49 En colonie

Modéliser, Calculer

Un groupe est composé de 110 adolescents. Combien d'équipes de même effectif (compris entre 6 et 20 adolescents) peut-on réaliser ? Combien d'adolescents y aura-t-il dans chaque équipe ? Donner toutes les possibilités.

Les diviseurs de 110 sont 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110.

On peut réaliser 10 équipes de 11 adolescents ou

11 équipes de 10 adolescents.

50 Métallurgie

Calculer, Raisonner

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 280 et 315.

$280 = 2^3 \times 5 \times 7$;

$315 = 3^2 \times 5 \times 7$

2. Une plaque métallique rectangulaire de dimensions 280 cm et 315 cm doit être coupée en carrés identiques, sans perte. Quelle est la dimension des plus grands carrés possibles ?

Pour qu'il n'y ait pas de perte, la longueur du côté du carré doit être un diviseur de 280 et de 315.

Le plus grand diviseur commun de 280 et de 315 est $5 \times 7 = 35$.

Les plus grands carrés possibles ont donc pour côté 35 cm.

51 Littéralement

Modéliser, Représenter

Écrire des expressions littérales qui désignent :

a. un multiple de 13 ;

$13n$ (n entier)

b. la somme d'un entier et de son suivant ;

$n + n + 1 = 2n + 1$ (n entier)

c. le carré d'un multiple de 5 ;

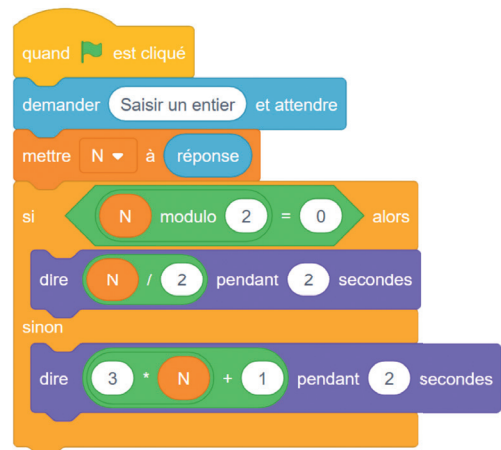
$(5n)^2 = 5n \times 5n = 25n^2$, avec n entier

d. la somme d'un multiple de 3 et d'un multiple de 4.

$3n + 4k$ (n et k entiers)

52 Vers Syracuse

Modéliser, Calculer



La commande modulo donne le reste de la division euclidienne du premier nombre par le second.



1. Que signifie $N \text{ modulo } 2 = 0$ pour le nombre N ?

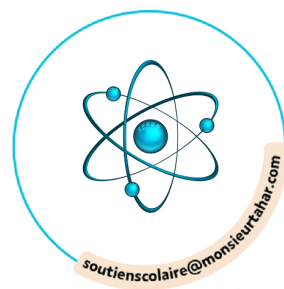
Cela signifie que le reste de la division par 2 est 0, donc que N est pair.

2. Que dit le lutin si on saisit 15 au départ ?

15 est impair ; le lutin dit 46.

3. On saisit 5 au départ. On saisit ensuite le nombre dit par le lutin, et ainsi de suite. Quels sont les dix premiers nombres qui seront dits par le lutin ?

16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2



53 Avec deux entiers

Calculer, Représenter

Les décompositions en produits de facteurs premiers de 175 et 245 sont $5^2 \times 7$ et 5×7^2 .

1. Quel est le plus grand diviseur commun de ces deux nombres ?

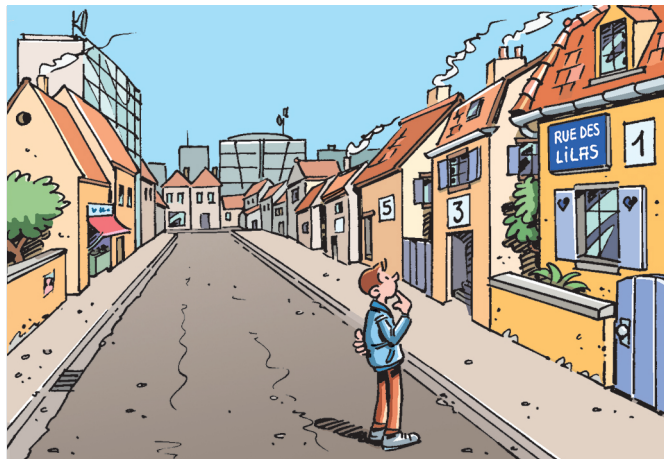
$$5 \times 7 = 35.$$

2. Simplifier autant que possible $\frac{175}{245}$.

$$\frac{175}{245} = \frac{5^2 \times 7}{5 \times 7^2} = \frac{5}{7}$$

54 Rue des Lilas

Chercher, Communiquer



Maxime habite rue des Lilas, le numéro de sa maison est un multiple de 5 et les deux maisons précédentes portent des numéros qui sont des nombres premiers inférieurs à 100.

► À quel numéro habite Maxime ?

Les trois maisons portent les numéros 71, 73 et 75.

Maxime habite au 75 rue des Lilas.

55 Nombre mystère

Chercher, Calculer

Je suis un nombre entier. Le quotient de ma division euclidienne par 11 ou par 12 est le même, mais pour 11, le reste est 5, et pour 12, le reste est 2.

► Qui suis-je ? Justifier.

Notons q le quotient commun. On a donc

$$11q + 5 = 12q + 2, \text{ donc } q = 5 - 2 = 3.$$

Le nombre mystère est $11 \times 3 + 5 = 38$.

56 Vrai ou faux ?

Chercher, Calculer

Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

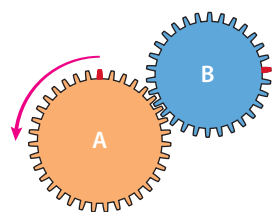
Vrai : 30 répond à ces conditions.

La somme de ses chiffres est divisible par 3 mais pas par 9 et $30 = 4 \times 7 + 2$ donc 30 n'est pas divisible par 4.

57 Engrenages

Modéliser, Calculer

► Au bout de combien de tours chacune des roues A (30 dents) et B (35 dents) reviennent-elles dans leur position initiale ?



Le plus petit multiple commun

de 30 et 35 est 210.

$$210 \div 30 = 7 \text{ et } 210 \div 35 = 6.$$

La roue A fera 7 tours et la roue B 6 tours.

58 À Pâques

Calculer, Raisonner

1. Décomposer 4 655 et 1 425 en produits de facteurs premiers.

$$4\,655 = 5 \times 7^2 \times 19$$

$$1\,425 = 3 \times 5^2 \times 19$$

2. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $4\,655 \times 1\,425$.

$$4\,655 \times 1\,425 = 5 \times 7^2 \times 19 \times 3 \times 5^2 \times 19$$

$$= 3 \times 5^3 \times 7^2 \times 19^2$$

3. Quel nombre maximum de sachets identiques peut-on réaliser avec 4 655 œufs de Pâques et 1 425 coqs en chocolat ? Quel est alors le prix d'un sachet sachant qu'un œuf coûte 0,12 € et un coq 0,30 € ?

D'après la question 1, le plus grand diviseur commun

de 4 655 et 1 425 est : $5 \times 19 = 95$.

On peut faire au maximum 95 sachets.

Un sachet contient $4\,655 \div 95 = 49$ œufs et

$1\,425 \div 95 = 15$ coqs. Le sachet coûte :

$$49 \times 0,12 \text{ €} + 15 \times 0,30 \text{ €} = 10,38 \text{ €}.$$

Problèmes

59 Sonneries

Chercher, Calculer

L'horloge de Rémi sonne toutes les 12 heures, et son alarme toutes les 15 heures. Le 21 septembre à 21 h, elles sonnent simultanément.

► Quand sonneront-elles ensemble la prochaine fois ?

Le plus petit multiple commun de 12 et 15 est 60.

Elles sonneront ensemble 60 heures (soit 2 jours

et demi) plus tard : le 24 septembre à 9 h.

60 Multiple ?

Calculer, Communiquer

Soit $a = 3^4 \times 7$.

Mika dit : « Le nombre $b = 2 \times 3^5 \times 7^2$ est un multiple de a ».

► Mika a-t-il raison ? Justifier sans utiliser la calculatrice.

On a $b = 2 \times 3^5 \times 7^2 = 2 \times 3 \times 7 \times (3^4 \times 7)$

$= 42 \times (3^4 \times 7) = 42 \times a$, donc b est un multiple de a .

Mika a raison.

61 Max a dit

Représenter, Calculer

Maxime affirme : « Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 4, je multiplie le résultat par 5. Je soustrais le nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 4. »

► Maxime a-t-il raison ? Justifier.

Soit n le nombre entier choisi.

$5(n + 4) - n = 5n + 20 - n = 4n + 20$, qui peut s'écrire

$4(n + 5)$. Comme $n + 5$ est un entier, on obtient bien

un multiple de 4. Maxime a raison.

62 Avec des fractions

Calculer

Simplifier autant que possible les fractions suivantes en décomposant d'abord le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\frac{180}{126} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{585}{1275} = \frac{3^2 \times 5 \times 13}{3 \times 5^2 \times 17} = \frac{3 \times 13}{5 \times 17} = \frac{39}{85}$$

$$\frac{1925}{4125} = \frac{5^2 \times 7 \times 11}{3 \times 5^3 \times 11} = \frac{7}{5 \times 3} = \frac{7}{15}$$

63 Toujours pair !

Raisonner

Démontrer que si a est un nombre entier naturel, alors $a(a + 1)$ est un nombre pair.

• Si a est pair, il s'écrit $2k$ (k entier).

$a(a + 1) = 2k(2k + 1)$ est alors un

multiple de 2, donc pair.

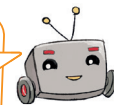
• Si a est impair, il s'écrit $2k + 1$ (k entier).

$a(a + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 1) = 2(2k + 1)(k + 1)$ est alors

un multiple de 2, donc pair.

• Quel que soit l'entier a , $a(a + 1)$ est donc pair.

Tu peux raisonner par disjonction de cas (voir page 8).



64 Magique !

Raisonner

1. Appliquer le programme de calcul suivant avec trois nombres de son choix.

► Choisir un nombre de deux chiffres

► Écrire ce nombre deux fois pour obtenir un nombre de quatre chiffres

► Diviser ce nombre par 101

Quelle conjecture peut-on faire ?

$$3\,535 \div 101 = 35$$

$$8\,282 \div 101 = 82$$

$$6\,363 \div 101 = 63 ; \text{ Il semble que l'on obtient toujours }$$

le nombre initial.

2. Démontrer cette conjecture en notant d et u les chiffres des dizaines et des unités du nombre initial.

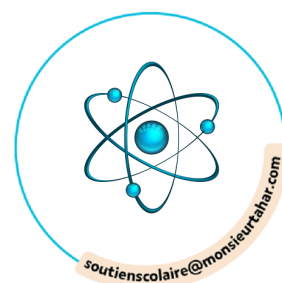
Le nombre initial est $10d + u$.

Le nombre de quatre chiffres obtenu est

$$1\,000d + 100u + 10d + u = 1\,010d + 101u = 10 \times 101d$$

$$+ 101u = 101 \times (10d + u).$$

Ce nombre divisé par 101 donne bien le nombre initial.



Tâche complexe

65

Un artiste réalise des structures à partir de cubes (**doc 1**), à la façon du sculpteur américain Sol LeWitt (1928 - 2007). Pour transporter ses œuvres, cet artiste a trouvé des containers métalliques (**doc 2**).

Doc 1 Pyramide de Sol LeWitt



Doc 2 Dimension d'un container



Doc 3 Les cubes de béton

Les cubes utilisés sont tous des cubes de béton cellulaire de mêmes dimensions.
Chaque arête de ces cubes mesure un nombre entier de centimètres strictement supérieur à 1.
Les cubes rangés occupent la totalité de l'espace intérieur du container

► Combien de cubes chaque container permet-il de ranger ?

La longueur des arêtes des cubes est un diviseur de 92, 161 et 207.

• Diviseurs de 92 : 1 ; 2 ; 4 ; 23 ; 46 ; 92 ;

• Diviseurs de 161 : 1 ; 7 ; 23 ; 161

• Diviseurs de 207 : 1 ; 3 ; 9 ; 23 ; 69 ; 207

Le seul diviseur commun de ces trois nombres est 23 ; les cubes mesurent donc 23 cm d'arête.

Le nombre de cubes contenus dans le container est : $\frac{V_{\text{container}}}{V_{\text{cube}}} = \frac{92 \times 161 \times 207}{23^3} = 252$.

Chaque container contient 252 cubes.



Le jeu

Juniper Green

Règle 1 Chaque joueur, à tour de rôle, coche une case qui n'a pas encore été cochée.

Règle 2 On ne peut cocher

une case que si son numéro

est un diviseur ou un multiple du numéro de la case cochée au coup précédent.

Règle 3 Un joueur perd la partie lorsqu'il ne peut plus jouer en utilisant les règles précédentes.

Jouer pour développer une stratégie gagnante.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Le défi

La reine des pommes

Mathilde a plus d'une pomme mais moins de 200 pommes. Que l'on remplisse des cagettes en mettant 12 pommes, 14 pommes ou 21 pommes par cagette, il lui en reste toujours une en trop. Combien Mathilde a-t-elle de pommes ?

Mathilde a 85 ou 169 pommes.