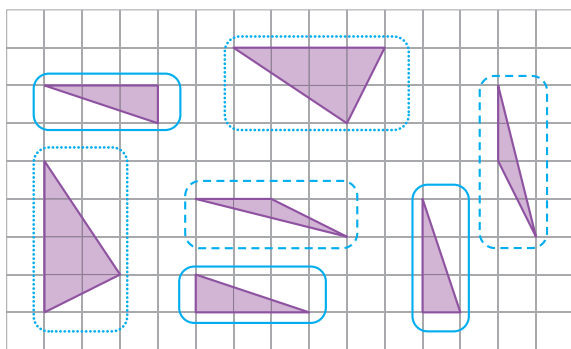


1

Reconnaitre des triangles égaux

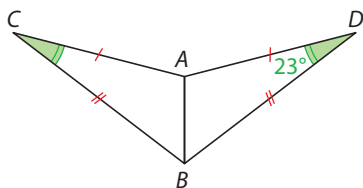
Deux triangles sont **égaux** lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

1 Entourer d'une même couleur les triangles égaux.



Si deux triangles sont **égaux**, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

2 1. Démontrer que les triangles CAB et ADB sont égaux.



$[AB]$ est un côté commun, de plus $CA = AD$ et $CB = BD$.
Les côtés sont de même longueur deux à deux, donc les triangles sont égaux.

2. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$. Justifier.

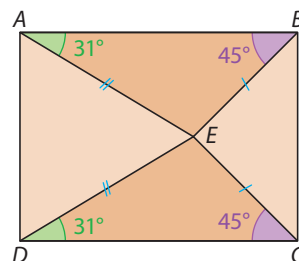
Si deux triangles sont égaux, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Donc $\widehat{BCA} = \widehat{ADB} = 23^\circ$.

Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont **égaux**.

3 $ABCD$ est un rectangle.

1. Démontrer que les triangles ABE et ECD sont égaux.



$ABCD$ est un rectangle, donc $AB = CD$.

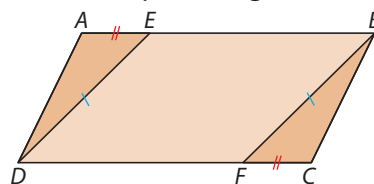
Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ (de même longueur) sont compris entre deux angles respectivement de même mesure, donc les triangles ABE et ECD sont égaux.

2. En déduire des égalités de longueurs que l'on codera sur la figure.

On en déduit que $AE = DE$ et $BE = CE$.

Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ils sont **égaux**.

4 **MODE EXPERT** $ABCD$ est un parallélogramme.



1. Démontrer que les triangles AED et BCF sont égaux.

$ABCD$ est un parallélogramme, donc $AD = BC$ et $\widehat{DAE} = \widehat{BCF}$. On a de plus $AE = CF$.

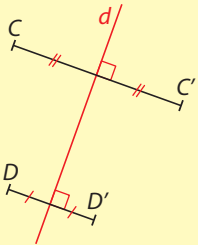
Les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BCF}$ (de même mesure) sont compris entre deux côtés respectivement de même longueur, donc les triangles AED et BCF sont égaux.

2. Quelle nouvelle égalité de longueur peut-on en déduire ?

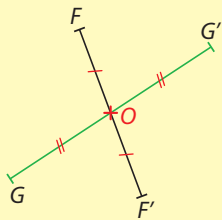
$ED = BF$

La symétrie (axiale ou centrale) **conserve** les longueurs, les mesures des angles, les alignements et les aires.

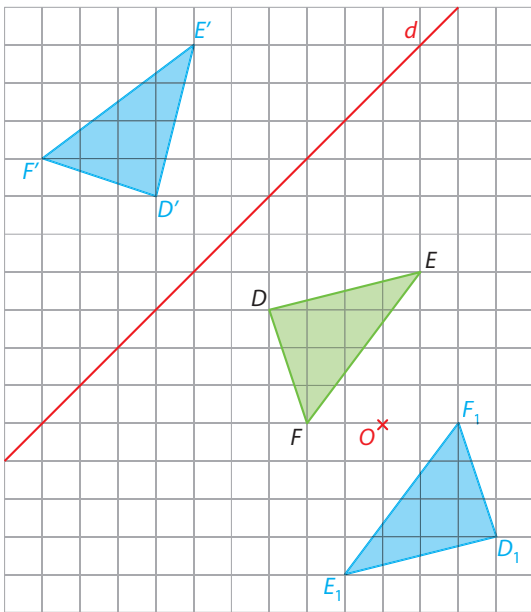
Symétrie d'axe d



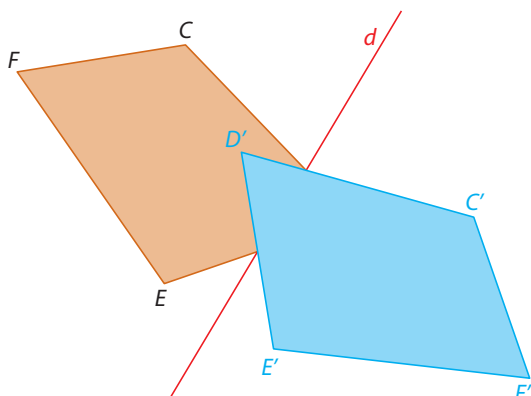
Symétrie de centre O



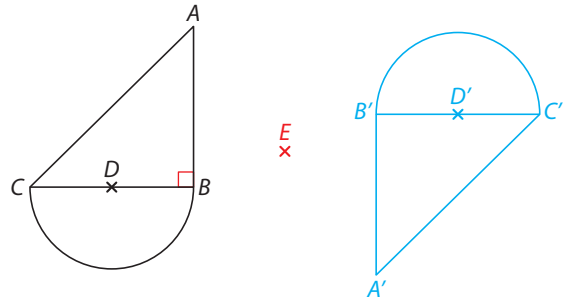
5 Tracer le triangle $D'E'F'$ symétrique de DEF par rapport à la droite d , puis $D_1E_1F_1$ symétrique de DEF par rapport au point O .



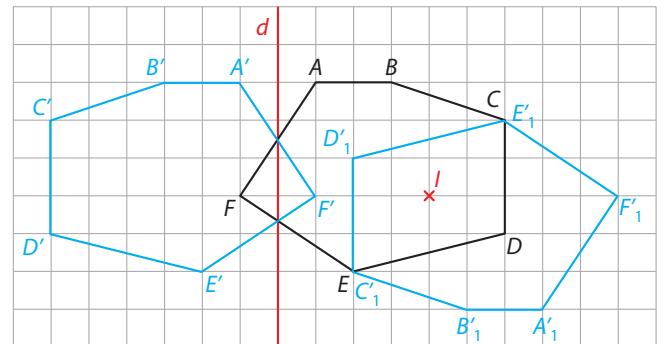
6 Construire le symétrique du quadrilatère $CDEF$ par rapport à la droite d .



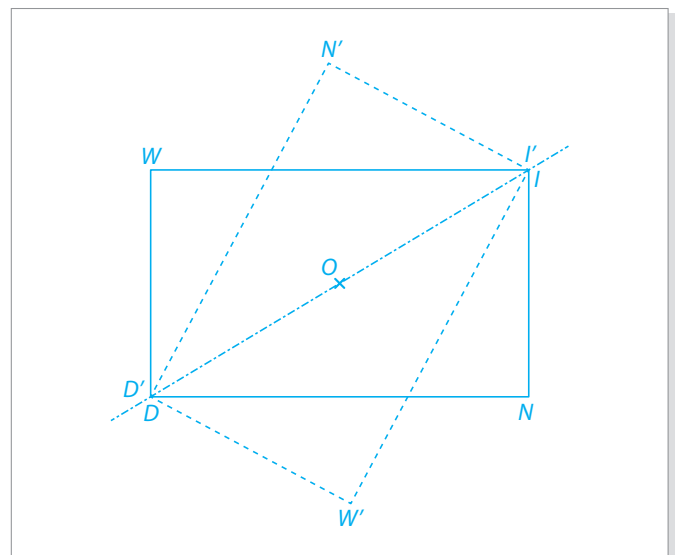
7 Construire le symétrique de la figure par rapport au point E .



8 Tracer le symétrique de la figure par rapport à la droite d , puis par rapport au point I .



9 **MODE EXPERT** 1. Construire un rectangle $WIND$ tel que $WI = 5$ cm et $IN = 3$ cm, puis son symétrique $W'I'N'D'$ par rapport à la droite (DI) .



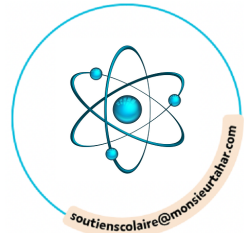
2. La figure obtenue possède un centre de symétrie. Lequel ? Justifier.

Par les propriétés de conservation, $W'I'N'D'$ est aussi un rectangle, donc le milieu O de $[DI]$ est aussi le milieu de $[WN]$ et de $[W'N']$.



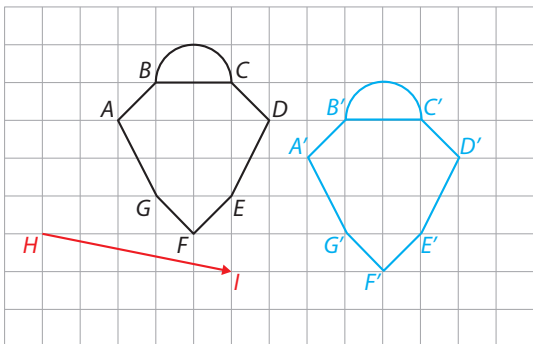
3

Transformer une figure par translation

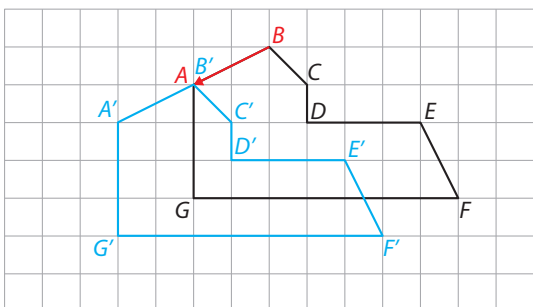


► Effectuer une **translation**, c'est faire **glisser** selon : une direction, un sens, une longueur.
On peut représenter ce glissement par des flèches (appelées **vecteurs**).

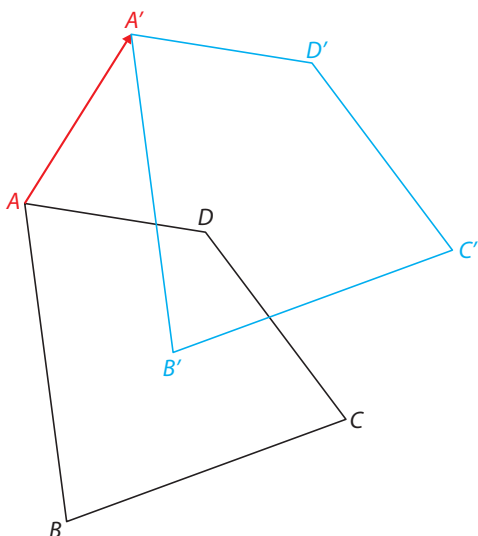
10 Construire l'image de la figure par la translation de vecteur $\vec{HI}$.



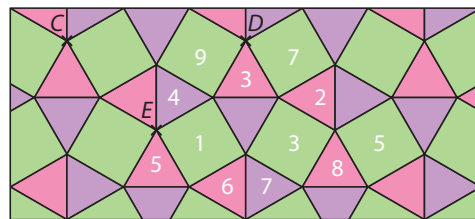
11 Construire l'image de la figure par la translation de vecteur $\vec{BA}$.



12 Construire l'image du quadrilatère ABCD par la translation de vecteur $\vec{AA'}$.



13 On considère le pavage suivant. Compléter.

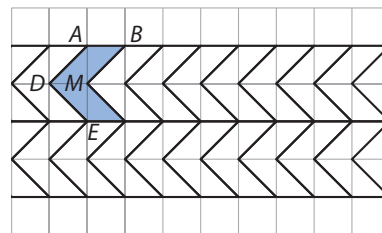


a. L'image du motif 1 par la translation de vecteur $\vec{CD}$ est le motif 5.

b. L'image du motif 2 par la translation de vecteur $\vec{DE}$ est le motif 6.

c. L'image du motif 8 par la translation de vecteur $\vec{DC}$ est le motif 5.

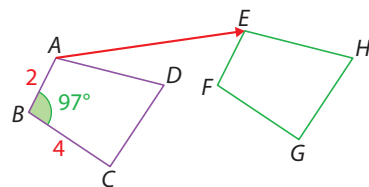
14 **MODE EXPERT** Décrire deux translations qui permettent d'obtenir ce pavage à partir de la figure bleue.



La translation de vecteur $\vec{AB}$ et la translation de vecteur $\vec{AE}$.

► La translation **conserve** les longueurs, les mesures des angles, les alignements et les aires.

15 EFGH est l'image de ABCD par la translation de vecteur $\vec{AE}$. Les longueurs sont en centimètres. Compléter.



a. [EF] est l'image de [AB]. Or la translation conserve les longueurs, donc $EF =$ 2.

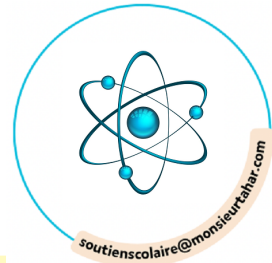
b. $\widehat{EFG}$ est l'image de $\widehat{ABC}$. Or la translation conserve les mesures des angles, donc $\widehat{EFG} =$ 97°.

c. La translation conserve les aires, donc :

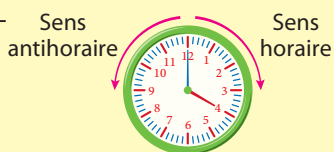
l'aire de EFGH est égale à l'aire de ABCD



4 Transformer une figure par rotation

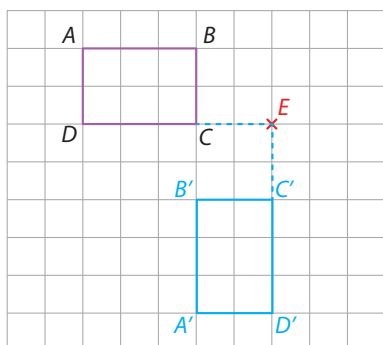


Une **rotation** est définie par un **centre**, un **angle** de rotation, un **sens** de rotation (horaire ou antihoraire).

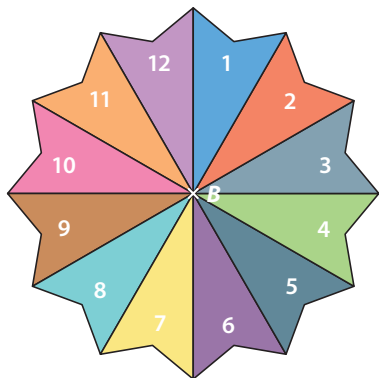


La rotation **conserve** les longueurs, les mesures des angles, les alignements et les aires.

16 Construire l'image du rectangle $ABCD$ par la rotation de centre E , d'angle 90° dans le sens antihoraire.

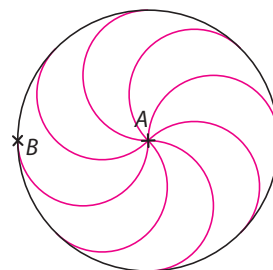


17 Soit la rosace suivante composée de 12 quadrilatères superposables. Compléter.

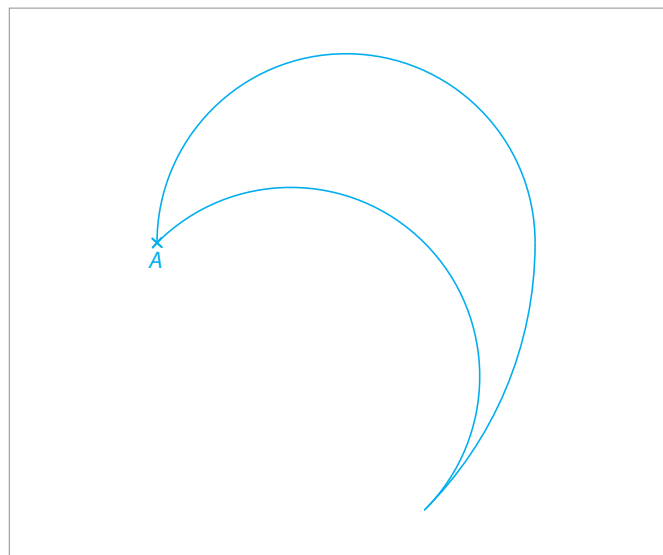


- L'angle de la rotation de centre B qui transforme la figure 1 en la figure 2 est 30° .
- L'image de la figure 3 par la rotation de centre B , d'angle 120° dans le sens horaire est la figure 7 .
- L'image de la figure 10 par la rotation de centre B , d'angle 210° dans le sens antihoraire est la figure 3 .
- La figure 5 est l'image de la figure 2 par la rotation de centre B , d'angle 90° dans le sens **horaire**.
- La rotation de centre B d'angle 180° est la symétrie **centrale de centre B**.

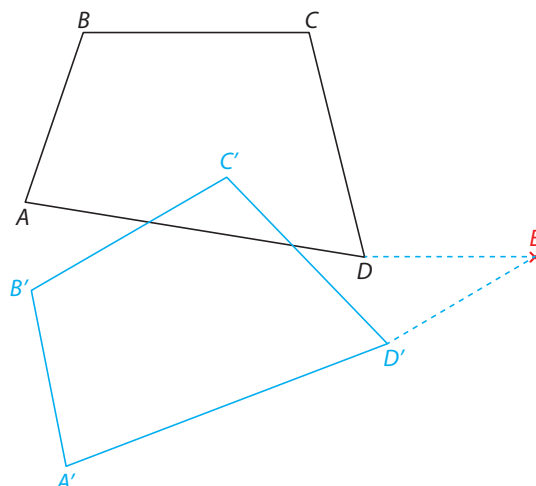
18 Cette rosace est réalisée à partir d'un motif constitué de demi-cercles et reproduit plusieurs fois par une rotation de centre A et d'angle 45° .

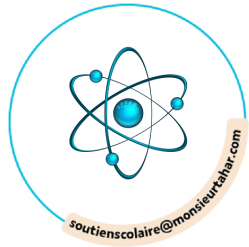


Construire ce motif sachant que $AB = 5 \text{ cm}$.



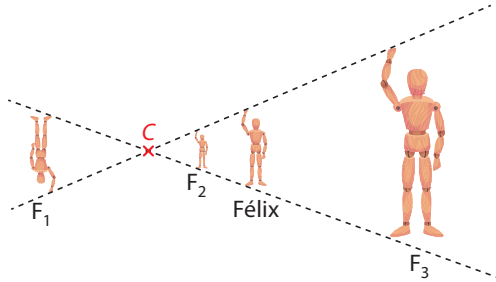
19 **MODE EXPERT** Construire l'image du quadrilatère $ABCD$ par la rotation de centre E , d'angle 30° dans le sens antihoraire.





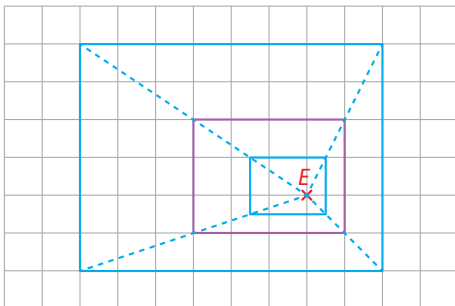
Une **homothétie** est définie par un **centre** et un nombre k non nul (appelé le **rapport**).
L'homothétie agrandit ou réduit la figure initiale.
Par une homothétie de rapport $k > 0$, les longueurs sont multipliées par k et les aires par k^2 .

20 Compléter.



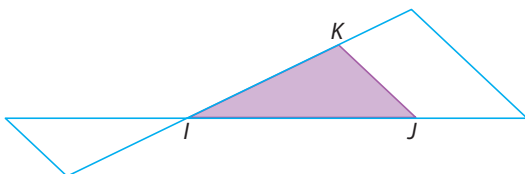
- Par l'homothétie de centre C et de rapport 2,5 l'image de Félix est **F3**.
- Par l'homothétie de centre C et de rapport 0,5 l'image de Félix est **F2**.
- Par l'homothétie de centre C et de rapport -1 l'image de Félix est **F1**.
- Une homothétie de rapport -1 est une **symétrie centrale**.

21 Construire l'image du rectangle par l'homothétie de centre E et de rapport 2, puis de rapport $\frac{1}{2}$.



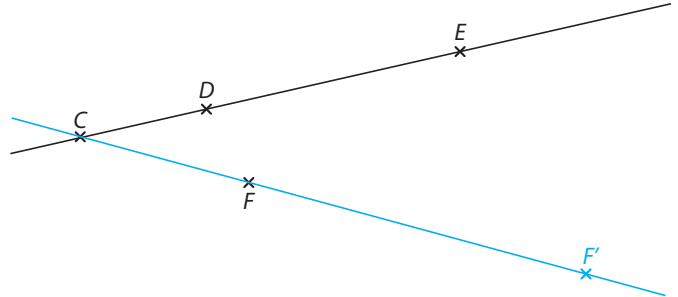
22 Construire l'image du triangle IJK par l'homothétie de centre I et de rapport :

- 1,5
- $-0,8$



23 **MODE EXPERT** 1. Quel est le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme D en E ?

Le rapport vaut : $51 \div 17 = 3$.



- Construire le point F' tel que le triangle CEF' soit l'image du triangle CDF par cette homothétie.
- Compléter la phrase suivante.
Le triangle CDF est l'image de CEF' par l'homothétie de centre **C** , de rapport **$\frac{1}{3}$** .

24 1. Un hexagone de périmètre 35 cm est transformé par une homothétie de rapport 4,1. Quelle est la nature et le périmètre de la figure obtenue ?

C'est un hexagone et son périmètre est $35 \text{ cm} \times 4,1 = 143,5 \text{ cm}$.

2. Un triangle d'aire 20 m^2 est transformé par une homothétie de rapport 0,7. Quelle est la nature et l'aire de la figure obtenue ?

C'est un triangle d'aire $20 \text{ m}^2 \times 0,7^2 = 9,8 \text{ m}^2$.

25 **MODE EXPERT** 1. Un segment de longueur 5 cm a pour image un segment de longueur 41 cm par une homothétie. Quel est le rapport de cette homothétie ?

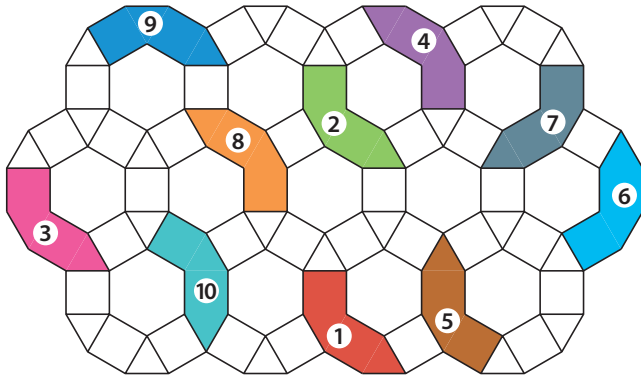
$41 \div 5 = 8,2$.

Le rapport de l'homothétie est **8,2**.

2. Une figure d'aire $110,08 \text{ cm}^2$ est l'image d'une figure d'aire 43 cm^2 par une homothétie. Quel est le rapport de cette homothétie ?

$k^2 = 110,08 \div 43 = 2,56$ donc $k = \sqrt{2,56} = 1,6$.

26 Parcours ceinture jaune



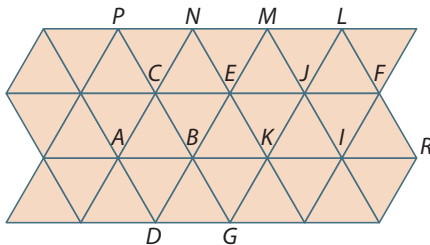
Compléter les phrases suivantes par : symétrie centrale, translation ou rotation.

On passe de la figure 1 à :

1. la figure 2 par une translation
2. la figure 3 par une translation
3. la figure 4 par une symétrie centrale
4. la figure 6 par une rotation
5. la figure 7 par une rotation
6. la figure 8 par une symétrie centrale

27 Parcours ceinture verte

On considère le pavage composé de triangles équilatéraux égaux ci-dessous.

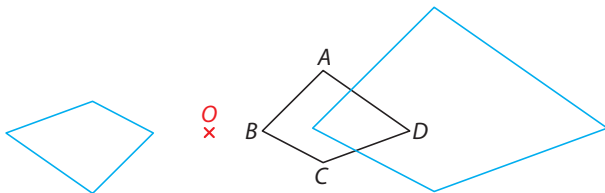


Quelle est l'image du triangle :

1. JFI par la symétrie d'axe (LK) ? MJE
2. FRI par la symétrie de centre J ? NME
3. CEB par la translation de vecteur $\overrightarrow{PM}$? JFI
4. CEB par la translation de vecteur $\overrightarrow{KF}$? MLJ
5. MJE par la rotation de centre E d'angle 60° dans le sens horaire ? JKE
6. PNC par la rotation de centre B d'angle 60° dans le sens horaire ? MJE
7. MLJ par l'homothétie de centre L et de rapport 3 ? PLG
8. PNC par l'homothétie de centre P et de rapport 2 ? PMB

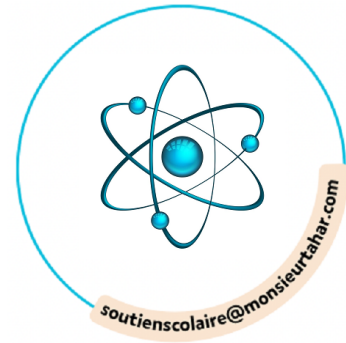
28 Parcours ceinture noire

1. Construire l'image du quadrilatère $ABCD$ par l'homothétie de centre O de rapport 2.



2. L'aire de ce quadrilatère est-il le double de l'aire de $ABCD$? Non
3. Construire l'image du quadrilatère $ABCD$ par l'homothétie de centre O de rapport -1 .
4. Cette dernière homothétie est-elle une symétrie de centre O ? Oui

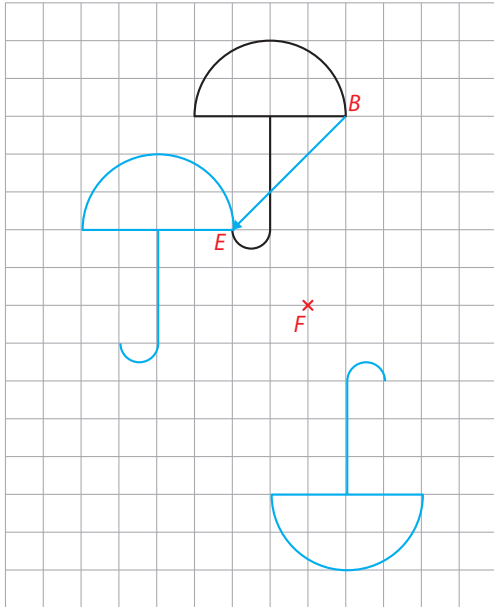
Problèmes



29 Il pleut !

Représenter

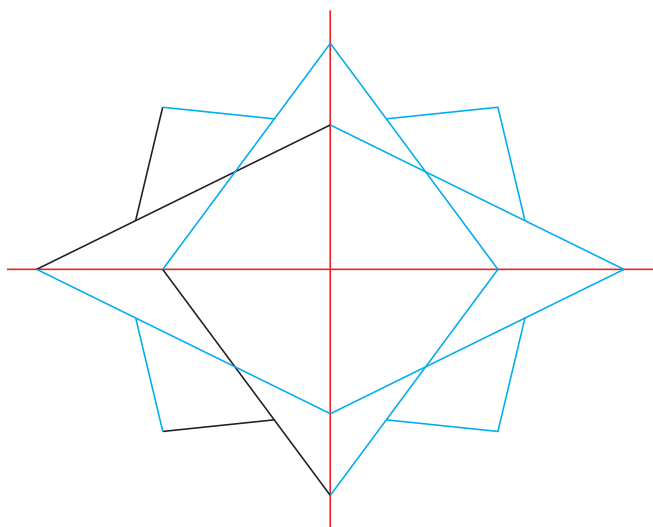
- Construire l'image de la figure par la symétrie de centre F puis par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.



30 Flocon

Représenter, Raisonner

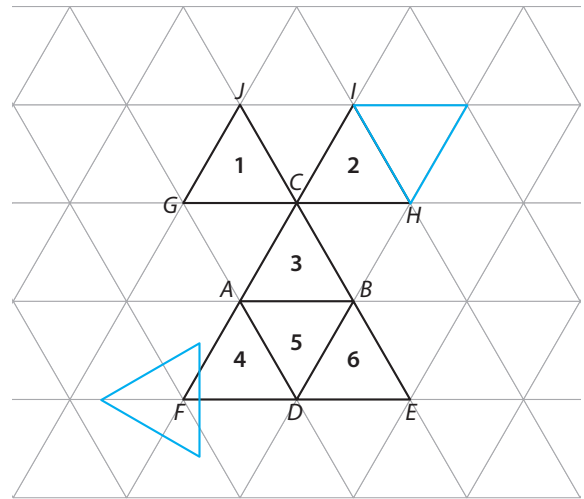
- Compléter la figure de telle sorte que les deux droites rouges soient des axes de symétrie de la figure obtenue.



31 Dans tous les sens

Représenter

On considère la figure composée de six triangles équilatéraux.



1. a. Décrire deux transformations de natures différentes qui transforment le triangle 1 en triangle 3.

La translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ (ou $\overrightarrow{JC}$ ou $\overrightarrow{AD}$...)

et la rotation de centre C , d'angle 120° dans le sens antihoraire.

- b. Décrire une rotation par laquelle le triangle 5 est l'image du triangle 4.

La rotation de centre D , d'angle 60° dans le sens horaire.

- c. Quel triangle a pour image le triangle 4 par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$?

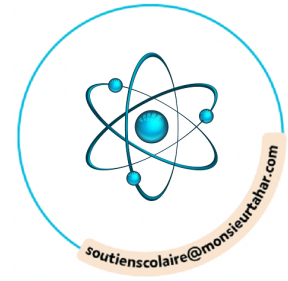
Le triangle 2.

- d. Quelle est l'image du triangle 3 par l'homothétie de centre C , de rapport 2 ?

Le triangle FCF .

2. Construire l'image du triangle 2 par la rotation de centre H , d'angle 60° dans le sens horaire.

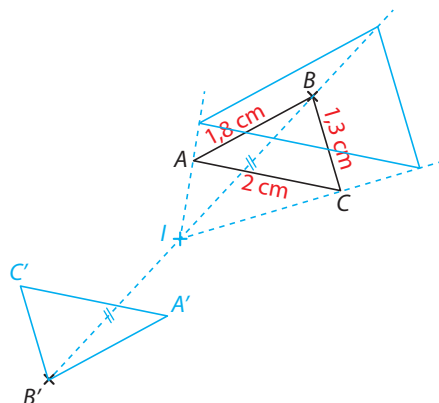
3. Construire l'image du triangle 3 par la rotation de centre D , d'angle 90° dans le sens antihoraire.



32 Centre perdu

Chercher, Représenter, Raisonner

1. B' est le symétrique du point B par rapport à un point I qui a été effacé. Retrouver le point I et construire le symétrique du triangle ABC par rapport à I .



2. Construire l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre I et de rapport 1,5.
3. Calculer le périmètre de ce nouveau triangle.

Cette homothétie multiplie les longueurs par 1,5

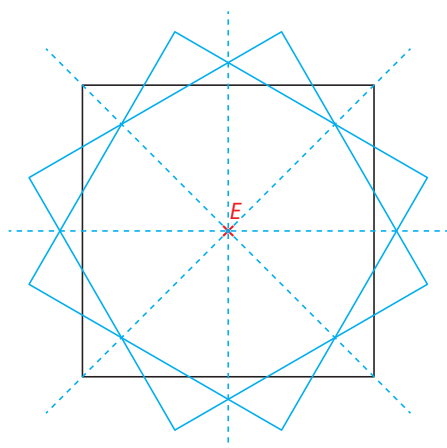
donc le périmètre cherché est

$$1,5 \times (2 \text{ cm} + 1,8 \text{ cm} + 1,3 \text{ cm}) = 7,65 \text{ cm}.$$

33 Rosace

Représenter

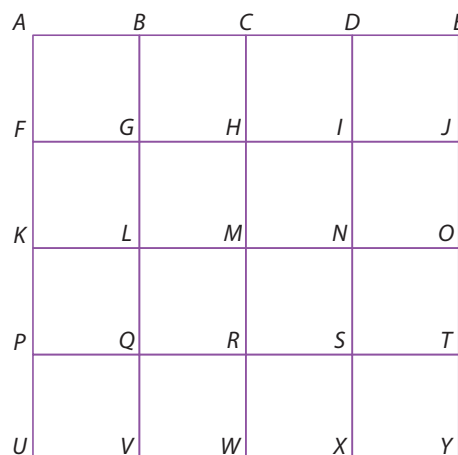
1. Construire les images du carré ci-dessous par les rotations de centre E d'angles respectifs 60° et 120° (dans le sens horaire).



2. Tracer les axes de symétrie de la figure obtenue.

34 Grille

Représenter



La figure ci-dessus est composée de seize carrés superposables.

1. Quelle est l'image du rectangle $ACHF$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{KV}$?

Le rectangle $LNSQ$.

2. Quelle est l'image du rectangle $ACHF$ par la rotation de centre M et d'angle 90° dans le sens horaire ?

Le rectangle $DEON$.

3. Quelle est l'image du carré $ABGF$ par l'homothétie de centre A de rapport 3 ?

Le carré $ADSP$.

4. Quelle est l'image du carré $DEJI$ par l'homothétie de centre I de rapport -2 ?

Le carré $GISQ$.

5. Quelle est l'image du rectangle $PRWU$ par la symétrie d'axe (FX) suivie de la symétrie de centre N ?

Le rectangle $IJTS$.

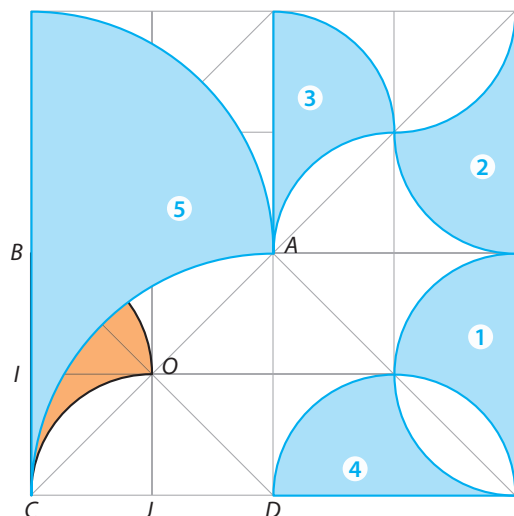
6. Quelle est l'image du rectangle $AFHC$ par translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la rotation de centre G et d'angle 90° dans le sens horaire ?

Le rectangle $GHRQ$.

7. Quelle est l'image du carré $STYX$ par l'homothétie de centre Y et de rapport 2, suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{YS}$?

Le carré $GISQ$.

35 Constructions Représenter, Raisonner



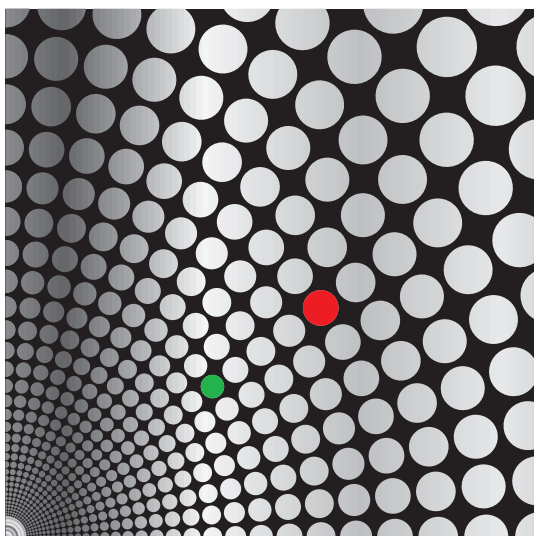
La figure coloriée est délimitée par le segment $[BC]$ et les quarts de cercle de centres I et J .

Construire et colorier l'image de cette figure par :

1. la symétrie d'axe (AD) .
2. la symétrie de centre A .
3. la translation de vecteur $\vec{CA}$.
4. la rotation de centre A qui transforme B en D .
5. l'homothétie de centre C de rapport 2.

36 Sans se tromper Calculer, Raisonner, Communiquer

On considère l'image ci-dessous



1. Décrire aussi précisément que possible une transformation par laquelle le disque rouge est l'image du disque vert.

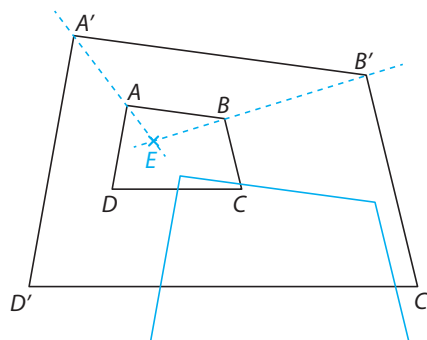
C'est l'homothétie qui a pour centre le coin inférieur gauche de l'image et de rapport environ égal à 1,5.

2. Manon affirme qu'il faut au moins deux fois plus d'encre pour colorier le disque rouge que pour colorier le disque vert. A-t-elle raison ?

L'aire du disque rouge est environ $1,5^2$ soit 2,25 fois plus grande que celle du disque vert.

Manon a donc raison.

37 Centre et rapport perdus Représenter, Raisonner, Communiquer



$A'B'C'D'$ est l'image du quadrilatère $ABCD$ par une homothétie.

1. Construire le centre E de cette homothétie et estimer la valeur de son rapport.

Une estimation de ce rapport est :

$$A'B' \div AB = 39 \div 13 = 3.$$

2. Définir l'homothétie qui permet de passer du quadrilatère $A'B'C'D'$ à $ABCD$.

C'est l'homothétie de centre E de rapport $\frac{EA}{EA'} = \frac{1}{3}$.

3. Construire l'image du quadrilatère $ABCD$ par l'homothétie de centre A' et de rapport 2.

4. Calculer le rapport de l'homothétie qui transforme ce dernier quadrilatère en $A'B'C'D'$. Justifier.

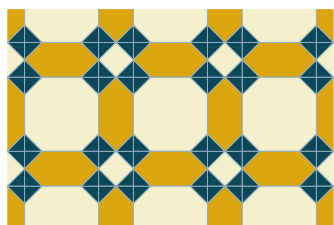
Les longueurs de $A'B'C'D'$ sont trois fois plus grandes que celles de $ABCD$, elles-mêmes deux fois plus petites que celles du dernier quadrilatère construit.

Le rapport cherché est donc $3 \div 2 = 1,5$.

Tâche complexe

38 Latifa a repéré à Grenade un motif géométrique qui lui plaît et qu'elle veut reproduire en collant des tesselles sur sa table de jardin.

Doc 1 Motif repéré en Espagne



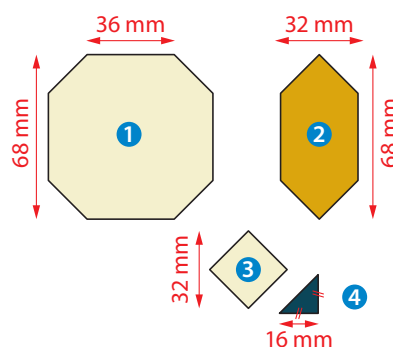
Doc 2 Table de jardin

Dimensions du plateau :
600 mm × 900 mm

Doc 3 Prix des tesselles

① 1,20 € ② 1 €
③ 0,60 € ④ 0,50 €

Doc 4 Tesselles en argile



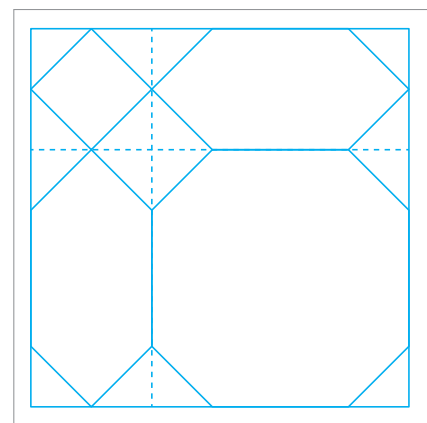
► Représenter à l'échelle $\frac{1}{2}$ un motif qui lui permet de construire le pavage par translations, puis calculer le coût des tesselles nécessaires à son projet.

Le motif pour paver la table est le carré représenté ci-contre, qui a pour côté $68 \text{ mm} + 32 \text{ mm} = 100 \text{ mm}$.

On en place donc 6 en largeur et 9 en longueur, soit 54.

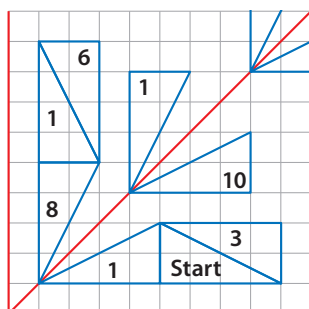
Chaque carré contient 1 tesselle ①, 2 tesselles ②, 1 tesselle ③ et 16 tesselles ④ ; il coûte donc 11,80 €.

Le coût total sera donc $54 \times 11,80 \text{ €} = 637,20 \text{ €}$



Le jeu

Figures sur un plateau
À trois ou quatre joueurs, il faut gagner des points en transformant des figures. Le plateau du jeu, les cartes et les règles sont téléchargeables sur le Labo Indigo.



Le défi

Le carré qui tourne

Un carré de côté 8 cm roule indéfiniment dans un pentagone régulier de côté 8 cm de telle sorte qu'au moins un de ses sommets reste en contact avec un des sommets du pentagone. Construire le pentagone et tracer la courbe décrite par le sommet A du carré.

Mathématiques sans frontières, 2005

