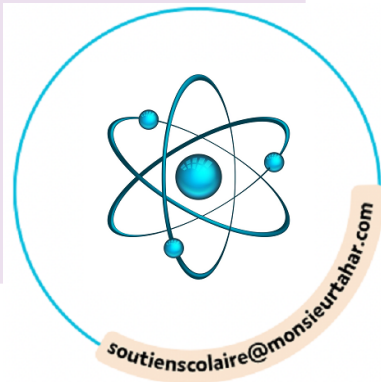




## 1

## Écrire une expression littérale

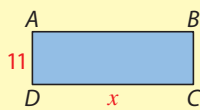
- Le résultat d'une addition est une **somme**.
- Le résultat d'une soustraction est une **différence**.
- Le résultat d'une multiplication est un **produit**.
- Le résultat d'une division est un **quotient**.
- « La somme de 4 et du produit de 7 par  $x$  » peut être traduit par l'**expression littérale**  $4 + 7x$ .

1 On désigne par la lettre  $x$  un nombre quelconque. Traduire chacune des phrases suivantes par une expression littérale.

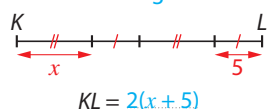
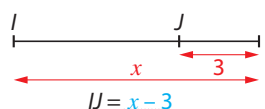
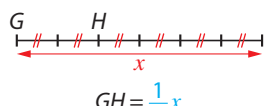
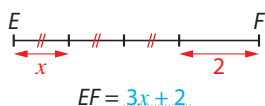
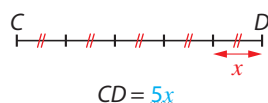
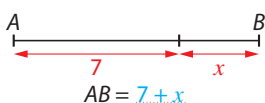
- Le produit de  $x$  par 6.  $6x$
- La somme de 7 et de  $x$ .  $7 + x$
- La différence entre 10 et le double de  $x$ .  $10 - 2x$
- Le carré de la somme de 11 et de  $x$ .  $(11 + x)^2$
- Le produit du carré de  $x$  par 3.  $3x^2$
- Le carré du produit de  $x$  par 3.  $(3x)^2$

Une expression littérale peut servir à exprimer une quantité qui dépend d'un **nombre variable** ou **inconnu**.

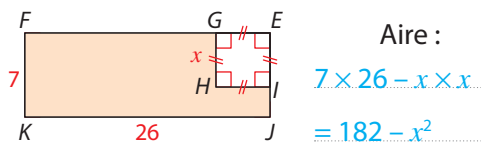
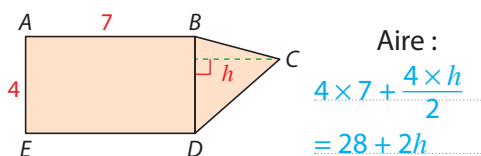
- Si on note  $x$  la longueur (en cm) du rectangle  $ABCD$ , alors l'**expression littérale** de l'aire de  $ABCD$  (en  $\text{cm}^2$ ) **en fonction de  $x$**  est  $11 \times x$  ou  $11x$ .



2 Exprimer les longueurs demandées en fonction de  $x$ .



3 Exprimer l'aire des figures coloriées en fonction du nombre représenté par une lettre.



4 Un cinéma propose les deux tarifs suivants :

- Tarif A : 7 € la place ;
  - Tarif B : abonnement annuel à 40 € puis 3 € la place.
- On désigne par  $n$  le nombre de places achetées dans l'année. Exprimer en fonction de  $n$  le prix à payer en euros avec chacun des deux tarifs.

Prix avec le tarif A :  $7 \times n = 7n$

Prix avec le tarif B :  $40 + 3 \times n = 40 + 3n$

5 1. Exprimer le cout en euros de  $n$  cahiers à 1,20 €, une trousse à 11,89 € et  $m$  stylos à 2,50 € :

$$C = 1,2n + 11,89 + 2,5m$$

2. Calculer le cout en euros pour  $n = 5$  et  $m = 4$ .

$$C = 1,2 \times 5 + 11,89 + 2,5 \times 4$$

$$C = 6 + 11,89 + 10$$

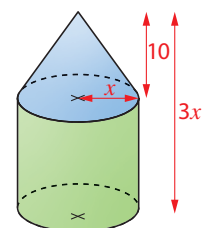
$$C = 27,89 \quad \text{Le cout est de } 27,89 \text{ €}.$$

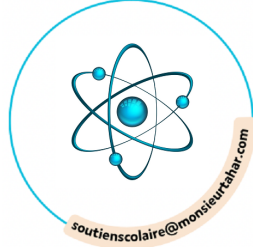
6 **MODE EXPERT** Exprimer en fonction de  $x$  le volume du solide formé du cône bleu et du cylindre vert.

$$V_{\text{cylindre}} = \pi x^2 \times (3x - 10)$$

$$V_{\text{cône}} = \frac{\pi x^2 \times 10}{3}$$

$$V = \frac{\pi x^2 \times 10}{3} + \pi x^2 \times (3x - 10)$$





► Pour **simplifier une somme**, on peut utiliser l'égalité  $ax + bx = (a + b)x$ .

► Pour **simplifier une différence**, on peut utiliser l'égalité  $ax - bx = (a - b)x$ .

$$\begin{aligned} \bullet A &= 3x + x + 5 & B &= 7b^2 + 2b - 5b - 5 + 3 \\ A &= (3 + 1)x + 5 & B &= 7b^2 + (2 - 5)b - 2 \\ A &= 4x + 5 & B &= 7b^2 - 3b - 2 \end{aligned}$$

7 Relier chaque expression à sa forme réduite.

$$\begin{aligned} 3a + 5b - a + b &\bullet -11a + 6b \\ a + a^2 + 6b + 2a &\bullet 2a + 6b \\ 3a + 13b - 7b &\bullet 3a + 6b \\ -7a - 4a + 7b - b &\bullet a^2 + 3a + 6b \end{aligned}$$

8 Simplifier les sommes suivantes sans détailler les étapes.

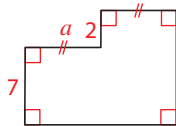
a.  $5 + 9x - 2 = 3 + 9x$

b.  $4x + x = 5x$

c.  $28x + 9x^2 - 2x = 26x + 9x^2$

d.  $8a + 2b - a + b = 7a + 3b$

9 **MODE EXPERT** Exprimer le périmètre de la figure suivante avec l'expression la plus simple possible.



$$7 + a + 2 + a + 9 + 2a = 18 + 4a$$

►  $a, b$  et  $c$  désignent des nombres quelconques.

On a  $a - (b + c) = a - b - c$ .

$$\begin{aligned} \bullet A &= -(5 + 3x) & B &= 2x - (x - 3) \\ A &= -5 - 3x & B &= 2x - x + 3 \\ & & B &= x + 3 \end{aligned}$$

10 Réduire les sommes suivantes.

a.  $A = 8 - (4x - 2)$       b.  $B = (3a + 2b) - (2a - b)$

$A = 8 - 4x + 2$        $B = 3a + 2b - 2a + b$

$A = 10 - 4x$        $B = a + 3b$

c. Soit  $C = 4x + 11$  et  $D = 5x - 4$ .  
Donner une expression réduite de  $C - D$ .

$C - D = 4x + 11 - (5x - 4)$

$C - D = 4x + 11 - 5x + 4 = -x + 15$

► Pour **simplifier un produit** de plusieurs facteurs, on peut modifier l'ordre de ses facteurs.

$$\begin{aligned} \bullet A &= a \times 5b & B &= 3x \times (-5x) \\ A &= a \times 5 \times b & B &= 3 \times x \times (-5) \times x \\ A &= 5 \times a \times b & B &= 3 \times (-5) \times x \times x \\ A &= 5ab & B &= -15 \times x^2 = -15x^2 \end{aligned}$$

11 Réduire les produits suivants.

a.  $5 \times 9x = 45x$

b.  $4x \times x = 4x^2$

c.  $-2x \times 9x^2 = -18x^3$

d.  $8a \times (-2b) \times (-a) = 16a^2b$

12 Réduire les expressions suivantes.

a.  $A = 8 \times 2x - (7x + 2)$

$A = 16x - (7x + 2)$

$A = 16x - 7x - 2$

$A = 9x - 2$

b.  $B = -7x \times 5x + (2x - 3) - x^2$

$B = -35x^2 + 2x - 3 - x^2$

$B = -36x^2 + 2x - 3$

c.  $C = 3a \times 7b - (2ab - b)$

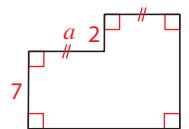
$C = 21ab - (2ab - b)$

$C = 21ab - 2ab + b$

$C = 19ab + b$

13 **MODE EXPERT** L'unité de longueur est le centimètre.

1. Exprimer l'aire de la figure avec l'expression la plus simple possible, puis la calculer pour  $a = 29$ .



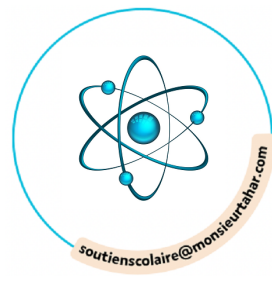
$7 \times a + 9 \times a = 7a + 9a = 16a$

Pour  $a = 29$ , l'aire est  $16 \times 29 = 464$ .

2. Exprimer, en fonction de  $a$ , le volume d'un prisme droit de hauteur  $3a$  et de base la figure ci-dessus, avec l'expression la plus simple possible.

$\text{volume} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

$\text{volume} = 16a \times 3a = 48a^2$



►  $a, b$  et  $k$  désignent des nombres.

$$k(a + b) = ka + kb$$

•  $A = 5(x + 4)$        $B = (2y - 7) \times 3y$   
 $A = 5 \times x + 5 \times 4$        $B = 3y \times 2y + 3y \times (-7)$   
 $A = 5x + 20$        $B = 6y^2 - 21y$

14 Développer les produits suivants.

$A = 8(x + 9)$        $B = 3x(2x + 4)$   
 $A = 8 \times x + 8 \times 9$        $B = 3x \times 2x + 3x \times 4$   
 $A = 8x + 72$        $B = 6x^2 + 12x$

15 Développer et réduire l'expression suivante.

$A = 6(x + 4) + 13(2x + 4)$   
 $A = 6 \times x + 6 \times 4 + 13 \times 2x + 13 \times 4$   
 $A = 6x + 24 + 26x + 52$   
 $A = 32x + 76$

16 1. Développer et réduire l'expression suivante.

$A = 2(x + 7) - 4(3x + 1)$   
 $A = 2 \times x + 2 \times 7 - 4 \times 3x - 4 \times 1$   
 $A = 2x + 14 - 12x - 4$   
 $A = -10x + 10$

2. Démontrer l'égalité suivante :

$$2(x + 7) - 4(3x + 1) = 10(-x + 1).$$

$10(-x + 1) = -10x + 10$   
 Donc  $2(x + 7) - 4(3x + 1) = 10(-x + 1)$

►  $a, b, c$  et  $d$  désignent des nombres.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

•  $A = (5 + 2x)(x - 4)$   
 $A = 5 \times x + 5 \times (-4) + 2x \times x + 2x \times (-4)$   
 $A = 5x - 20 + 2x^2 - 8x$   
 $A = 2x^2 - 3x - 20$

17 Développer et réduire.

a.  $A = (3x + 2)(5x + 7)$   
 $A = 3x \times 5x + 3x \times 7 + 2 \times 5x + 2 \times 7$   
 $A = 15x^2 + 21x + 10x + 14$   
 $A = 15x^2 + 31x + 14$

b.  $B = (8x - 2)(3x + 5)$

$B = 8x \times 3x + 8x \times 5 - 2 \times 3x - 2 \times 5$   
 $B = 24x^2 + 40x - 6x - 10$   
 $B = 24x^2 + 34x - 10$

c.  $C = (-x - 6)(-5x + 2)$

$C = -x \times (-5x) - x \times 2 - 6 \times (-5x) - 6 \times 2$   
 $C = 5x^2 - 2x + 30x - 12$   
 $C = 5x^2 + 28x - 12$

18 Développer et réduire les expressions suivantes.

a.  $A = (9 + 3t)^2 = (9 + 3t)(9 + 3t)$   
 $A = 9 \times 9 + 9 \times 3t + 3t \times 9 + 3t \times 3t$   
 $A = 81 + 27t + 27t + 9t^2$   
 $A = 81 + 54t + 9t^2$

b.  $B = (6x - 4)^2 = (6x - 4)(6x - 4)$   
 $B = 6x \times 6x + 6x \times (-4) - 4 \times 6x - 4 \times (-4)$   
 $B = 36x^2 - 24x - 24x + 16$   
 $B = 36x^2 - 48x + 16$

►  $a$  et  $b$  désignent des nombres.

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Cette égalité s'appelle une **identité remarquable**.

•  $A = (4x - 5)(4x + 5) = (4x)^2 - 5^2$   
 $A = 4x \times 4x - 5^2 = 16x^2 - 25$

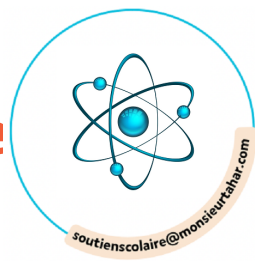
19 Développer les produits suivants en utilisant l'identité remarquable ci-dessus.

$A = (x - 8)(x + 8)$        $B = (7 - 3t)(7 + 3t)$   
 $A = x^2 - 8^2$        $B = 7^2 - (3t)^2$   
 $A = x^2 - 64$        $B = 49 - 9t^2$

20 **MODE EXPERT** Soit  $N = (2a + 3)(2a - 3)$ .

Montrer que, pour tout entier relatif  $a$ ,  $N + 9$  est un multiple de 4 positif.

$N + 9 = (2a + 3)(2a - 3) + 9$   
 $N + 9 = 4a^2 - 9 + 9 = 4a^2$   
 Quel que soit l'entier relatif  $a$ ,  $4a^2 \geq 0$   
 $N + 9 = 4 \times a^2$  et  $a^2$  est un entier, donc  $N + 9$  est un multiple de 4.



►  $a, b$  et  $k$  désignent des nombres.

$$ka + kb = k(a + b) \quad \text{et} \quad ka - kb = k(a - b)$$

$$\begin{aligned} \bullet A &= 35 + 15x & B &= 21 - 14x \\ A &= 5 \times 7 + 5 \times 3x & B &= 7 \times 3 - 7 \times 2x \\ A &= 5(7 + 3x) & B &= 7(3 - 2x) \end{aligned}$$

21 Factoriser les expressions suivantes.

a.  $7a - 7b = 7(a - b)$

b.  $21 + 7x = 7 \times 3 + 7x = 7(3 + x)$

c.  $26x - 39 = 13 \times 2x - 13 \times 3 = 13(2x - 3)$

22 Factoriser les expressions suivantes.

a.  $3x^2 + 2x = 3x \times x + 2x = (3x + 2)x$

b.  $18ab - 45b = 9b \times 2a - 9b \times 5 = 9b(2a - 5)$

►  $a, b$  et  $k$  désignent des nombres.

$$ka + kb = k(a + b) \quad \text{et} \quad ka - kb = k(a - b)$$

$$\begin{aligned} \bullet A &= (x + 5)(3x + 2) - (x + 5)(2x - 4) \\ A &= (x + 5)[(3x + 2) - (2x - 4)] \\ A &= (x + 5)(3x + 2 - 2x + 4) \\ A &= (x + 5)(x + 6) \end{aligned}$$

23 Factoriser les expressions suivantes.

a.  $A = (y - 2)(2y - 11) + (y - 3)(y - 2)$   
 $A = (y - 2)[2y - 11 + y - 3]$   
 $A = (y - 2)(3y - 14)$

b.  $B = (5x + 4)(x + 5) - (5x + 4)(3x - 4)$   
 $B = (5x + 4)[(x + 5) - (3x - 4)]$   
 $B = (5x + 4)[x + 5 - 3x + 4]$   
 $B = (5x + 4)(-2x + 9)$

c.  $C = (z + 3)(2z - 4) + (z + 3)(4z + 5)$   
 $C = (z + 3)(2z - 4 + 4z + 5)$   
 $C = (z + 3)(6z + 1)$

24 Factoriser les expressions suivantes.

a.  $A = (7x - 2)^2 + (5x - 6)(7x - 2)$   
 $A = (7x - 2)(7x - 2 + 5x - 6)$   
 $A = (7x - 2)(12x - 8)$

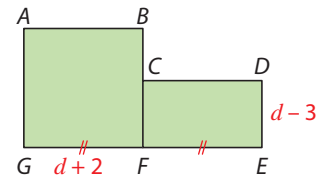
b.  $B = (2x - 5)(x + 10) + (2x - 5)^2$

$$B = (2x - 5)(x + 10) + (2x - 5)(2x - 5)$$

$$B = (2x - 5)(x + 10 + 2x - 5)$$

$$B = (2x - 5)(3x + 5)$$

25 **MODE EXPERT**  $ABFG$  est un carré et  $CDEF$  est un rectangle.



1. Exprimer l'aire de la figure coloriée en fonction de  $d$ .

$$\mathcal{A} = (d + 2)^2 + (d + 2)(d - 3)$$

2. En factorisant par  $(d + 2)$ , donner la forme factorisée de l'aire de cette figure.

$$\mathcal{A} = (d + 2)(d + 2) + (d + 2)(d - 3)$$

$$\mathcal{A} = (d + 2)(d + 2 + d - 3) = (d + 2)(2d - 1)$$

►  $a$  et  $b$  désignent des nombres.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\bullet 9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$$

26 Factoriser les expressions suivantes.

a.  $A = 16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$

b.  $B = x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$

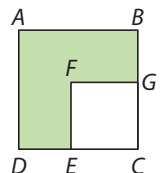
c.  $C = 36 - (3 + 2x)^2 = 6^2 - (3 + 2x)^2$   
 $C = [6 - (3 + 2x)][6 + (3 + 2x)]$   
 $C = (6 - 3 - 2x)(6 + 3 + 2x)$

$$C = (3 - 2x)(9 + 2x)$$

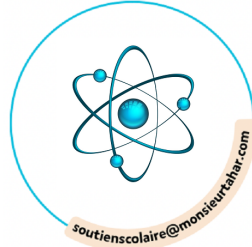
d.  $D = (x + 3)^2 - 25 = (x + 3)^2 - 5^2$   
 $D = (x + 3 - 5)(x + 3 + 5)$

$$D = (x - 2)(x + 8)$$

27 **MODE EXPERT** L'unité de longueur est le centimètre.  $ABCD$  est un carré de côté 7 et  $EFGC$  est un carré de côté  $x$ .  $E \in [DC]$  et  $G \in [BC]$ . Exprimer l'aire de la surface verte sous une forme factorisée.



$$\mathcal{A} = 7^2 - x^2 = (7 - x)(7 + x)$$



► Pour **utiliser une expression littérale** avec certaines valeurs, on remplace dans l'expression littérale toutes les lettres par leurs valeurs.

- Calculer  $A = x^2 - 7x + 6$  pour  $x = -3$ .

$$A = (-3)^2 - 7 \times (-3) + 6$$

$$A = 9 + 21 + 6 = 36$$

**28** On pose  $B = 3x + 4$ , où  $x$  est un nombre quelconque. Calculer la valeur de  $B$  :

a. pour  $x = 10$  :  $B = 3 \times 10 + 4 = 34$

b. pour  $x = -3$  :  $B = 3 \times (-3) + 4 = -5$

c. pour  $x = \frac{2}{3}$  :  $B = 3 \times \frac{2}{3} + 4 = 2 + 4 = 6$

**29** Calculer les expressions suivantes pour  $n = 7$ .

a.  $A = 3 + 6n$

$$A = 3 + 6 \times 7 = 3 + 42 = 45$$

b.  $B = (5n - 10)n$

$$B = (5 \times 7 - 10) \times 7 = 25 \times 7 = 175$$

c.  $C = \frac{4n - 35}{3n}$

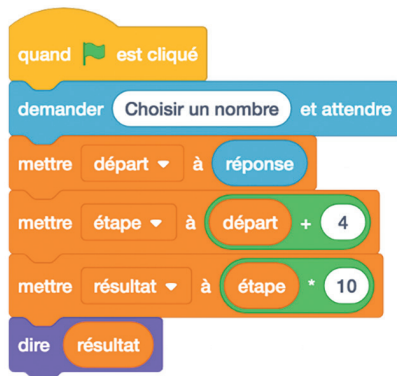
$$C = \frac{4 \times 7 - 35}{3 \times 7} = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3}$$

**30** Que dit le lutin si l'utilisateur choisit :

a. 34 ? **380**

b. -5 ? **-10**

c. -6,2 ? **-22**



**31** La distance de freinage, en mètres, d'un véhicule sur route mouillée peut se calculer à l'aide de la formule suivante où  $v$  est la vitesse en km/h du véhicule :

$$\text{Distance de freinage sur route mouillée} = \frac{v^2}{90}$$

Calculer au mètre près la distance de freinage sur route mouillée à 110 km/h.

$$\frac{110^2}{90} \approx 134$$

La distance de freinage sur route mouillée à 110 km/h est d'environ 134 m.

► Pour démontrer que **deux expressions littérales sont égales** pour tout nombre  $x$ , on peut transformer l'écriture de l'une pour obtenir l'écriture de l'autre.

**32** Voici deux programmes de calcul.

**Programme A**

Choisir un nombre.  
Lui ajouter 4.  
Multiplier le résultat par 3.  
Soustraire 12.

**Programme B**

Choisir un nombre.  
Le multiplier par 3.

On désigne par la lettre  $x$  le nombre choisi au départ.

1. Exprimer en fonction de  $x$  le résultat obtenu avec le programme A.  $(x + 4) \times 3 - 12$

2. Exprimer en fonction de  $x$  le résultat obtenu avec le programme B.  $3x$

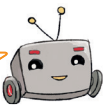
3. Montrer que les deux programmes de calcul donnent les mêmes résultats si on choisit le même nombre au départ.

$$(x + 4) \times 3 - 12 = 3x + 12 - 12 = 3x$$

Les deux programmes donnent le même résultat quel que soit le nombre  $x$  choisi.

**33** Prouver que « la somme de 42 et d'un multiple de 7 est aussi un multiple de 7 ».

Un multiple de 7 est un nombre qui peut s'écrire  $7k$ , où  $k$  est un entier.



$$7 \times k + 42 = 7 \times k + 7 \times 6 = 7(k + 6)$$

$k + 6$  est un nombre entier, donc  $7(k + 6)$  est bien un multiple de 7.

**34** **MODE EXPERT** Prouver que « la différence entre un multiple de 12 et un multiple de 14 est nombre pair ».

Multiple de 12 :  $12 \times k$ , où  $k$  est un entier.

Multiple de 14 :  $14 \times p$ , où  $p$  est un entier.

$$12 \times k - 14 \times p = 2 \times 6k - 2 \times 7p = 2 \times (6k - 7p)$$

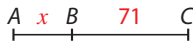
$6k - 7p$  est un nombre entier, donc  $2 \times (6k - 7p)$

est un multiple de 2, donc il est pair.

## 35 Parcours ceinture jaune

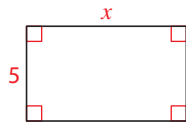
1. Exprimer AC en fonction de  $x$ .

$$AC = x + 71$$



2. Exprimer l'aire du rectangle en fonction de  $x$ .

$$\mathcal{A} = 5x$$



3. Réduire l'expression  $4a + 2b - a$ .  $3a + 2b$

4. Réduire l'expression  $4a \times 6$ .  $24a$

5. L'égalité  $-(4a - 5b) = -4a - 5b$  est-elle vraie ? Non

6. L'égalité  $5(x + 2) = 5x + 2$  est-elle vraie ? Non

7. Développer et réduire  $(3 + a)(3 - a)$ .  $9 - a^2$

8. Factoriser par 3 l'expression  $3a + 3b$ .  $3(a + b)$

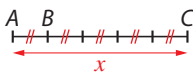
9. Quel que soit l'entier  $n$ , le nombre  $7n$  est-il un multiple de 7 ? Oui

10. Calculer  $4s + 5$  pour  $s = 10$ . 45

## 36 Parcours ceinture verte

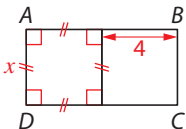
1. Exprimer AB en fonction de  $x$ .

$$AB = \frac{x}{5}$$



2. Exprimer l'aire de ABCD en

$$\text{fonction de } x. \mathcal{A}_{ABCD} = x^2 + 4x$$



3. Réduire l'expression  $4a + 2a^2 - 7a$ .  $-3a + 2a^2$

4. Réduire l'expression  $5a \times 6a$ .  $30a^2$

5. Le carré de  $5t$  est-il  $5t^2$  ? Non

6. Développer et réduire  $6(3a + 2)$ .  $18a + 12$

7. Développer  $(4 + x)(3 + x)$ .  $12 + 4x + 3x + x^2$

8. Factoriser par  $5t$  l'expression  $5t + 30t^2$ .  $5t(1 + 6t)$

9. Factoriser  $25 - x^2$ .  $(5 - x)(5 + x)$

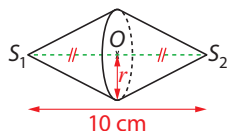
10. Quel que soit l'entier  $n$ , le nombre  $4n$  est-il un multiple de 8 ? Non

11. Calculer  $-10a^2 + 10$  pour  $a = -3$ . -80

## 37 Parcours ceinture noire

1. Exprimer le volume du solide ci-contre en fonction de  $x$ .

$$V = 2 \times \frac{5\pi r^2}{3} = \frac{10\pi r^2}{3}$$



2. Réduire  $6a + b - (3b - 5a)$ .  $11a - 2b$

3. Développer et réduire  $-7a(3a + 2b)$ .

$$-21a^2 - 14ab$$

4. Développer  $(-4z + 6)(2 + 3z)$ .

$$-8z - 12z^2 + 12 + 18z$$

5. Factoriser  $7t + 35t^2$ .  $7t(1 + 5t)$

6. Factoriser  $25x^2 - 121$ .  $(5x - 11)(5x + 11)$

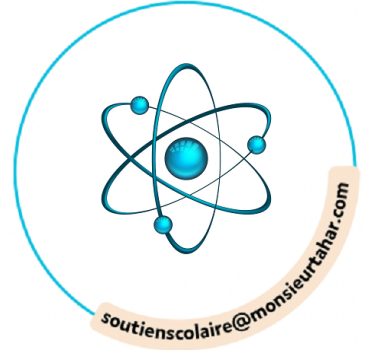
7. Quel que soit l'entier  $n$ , le nombre  $24n + 15$  est-il un multiple de 3 ? Oui

8. L'expression de l'énergie cinétique (en J) est

$$E_c = \frac{1}{2} \times m \times v^2 \text{ avec } m \text{ en kg et } v \text{ en m/s.}$$

Calculer l'énergie cinétique (en J) pour une masse de 10 kg et une vitesse de 3 m/s. 45 J

# Problèmes



## 38 Le rectangle agrandi

Représenter, Calculer

Un rectangle a pour dimensions 3 cm et 4 cm. On augmente ses dimensions de  $x$  cm.

Quelle est sa nouvelle aire en fonction de  $x$  ? On donnera la forme développée et réduite du résultat.

Sa nouvelle largeur est de  $(3+x)$  cm, et sa nouvelle longueur de  $(4+x)$  cm.

Son aire, en  $\text{cm}^2$ , vaut donc :

$$(3+x)(4+x) = 12 + 3x + 4x + x^2 = x^2 + 7x + 12.$$

## 39 IMC

Représenter, Calculer

L'indice de masse corporelle (IMC) d'une personne est le quotient de sa masse  $m$  en kilogrammes par le carré de sa taille  $t$  en mètres.

1. Entourer la formule correspondant au calcul de l'IMC.

$$m \times t^2 \quad \boxed{\frac{m}{t^2}} \quad \left(\frac{m}{t^2}\right)^2 \quad \frac{m^2}{t^2}$$

2. Gabriel mesure 1,72 m et pèse 65 kg. Quel est son IMC ?

$$\frac{65}{1,72^2} \approx 22$$

L'IMC de Gabriel est d'environ 22.

## 40 La chute

Calculer, Communiquer

La vitesse d'impact en m/s d'un objet lâché au-dessus du sol terrestre peut être calculée grâce à la formule suivante :  $v = 4,43\sqrt{h}$ ,

où  $h$  représente la hauteur initiale de l'objet en m.

On lâche un objet à 1,2 m du sol.

Calculer sa vitesse au moment où il touche le sol.

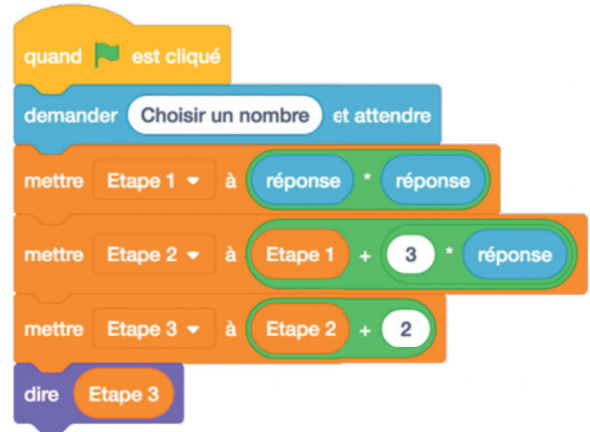
$$v = 4,43\sqrt{1,2} \approx 4,85$$

L'objet aura une vitesse de 4,85 m/s en touchant le sol.

## 41 Programme de calcul

Représenter, Calculer

On considère le programme de calcul suivant.



1. a. Montrer que si on choisit 1 comme nombre de départ, le lutin dit « 6 » à la fin du programme.

$$1^2 + 3 \times 1 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

b. Que dit le lutin si on choisit -5 comme nombre de départ ?

$$(-5)^2 + 3 \times (-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$$

2. On appelle  $x$  le nombre de départ.

a. Exprimer en fonction de  $x$  le nombre dit par le lutin.

$$x^2 + 3x + 2$$

b. Montrer que ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme  $(x+2)(x+1)$ .

$$(x+2)(x+1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

3. a. La feuille du tableau suivante regroupe des résultats du programme de calcul précédent.

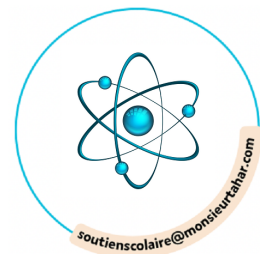
|   | A            | B  | C  | D  | E  | F | G | H  | I  |
|---|--------------|----|----|----|----|---|---|----|----|
| 1 | x            | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2  | 3  |
| 2 | $(x+2)(x+1)$ | 6  | 2  | 0  | 0  | 2 | 6 | 12 | 20 |

Quelle formule a été écrite dans la cellule B2 avant de la recopier jusqu'à la cellule I2 ?

$$=(B1+2)*(B1+1)$$

b. Trouver des valeurs de  $x$  pour lesquelles le programme donne 0 comme résultat.

$$-2 \text{ et } -1$$



## 42 Programmes équivalents

Calculer, Communiquer

► Montrer que les deux programmes de calcul suivants donnent les mêmes résultats, quel que soit le nombre choisi au départ.

### Programme A

► Choisir un nombre.  
 ► Lui soustraire 7.  
 ► Multiplier le résultat par la différence entre le nombre de départ et 1.

### Programme B

► Choisir un nombre.  
 ► Lui soustraire 4.  
 ► Mettre le résultat au carré.  
 ► Soustraire 9 au résultat obtenu.

On nomme  $x$  le nombre choisi au départ.

• Le programme A donne  $(x - 7) \times (x - 1)$ .

$$(x - 7) \times (x - 1) = x^2 - x - 7x + 7 = x^2 - 8x + 7$$

• Le programme B donne  $(x - 4)^2 - 9$ .

$$(x - 4)^2 - 9 = (x - 4)(x - 4) - 9$$

$$= x^2 - 4x - 4x + 16 - 9 = x^2 - 8x + 7$$

Les deux programmes donnent le même résultat.

## 43 D'après Brevet 2019

Chercher, Calculer

La formule permettant de calculer la masse d'alcool en g dans une boisson alcoolisée est la suivante :

$$m = V \times d \times 7,9$$

avec :

$V$  : volume de la boisson alcoolisée en cL,

$d$  : degré d'alcool de la boisson (exemple : un degré d'alcool de 2 % signifie que  $d$  est égal à 0,02)

Deux exemples de boissons alcoolisées :

#### Boisson ①

Degré d'alcool : 5 %

Contenance : 33 cl

#### Boisson ②

Degré d'alcool : 12 %

Contenance : 125 ml

► La boisson ① contient-elle une masse d'alcool supérieure à celle de la boisson ② ?

$$\text{La boisson ① : } 33 \times 0,05 \times 7,9 = 13,035 \text{ g}$$

$$\text{La boisson ② : } 12,5 \times 0,12 \times 7,9 = 11,85 \text{ g}$$

La boisson ① contient plus d'alcool que la boisson ②.

## 44 Affirmatif

Calculer, Communiquer

Pour un nombre  $x$  pris au hasard, Léa affirme que le produit de la somme de  $x$  et de 5 par la différence entre  $2x$  et 1 est égale à  $2x^2 + 9x - 5$ .

► Léa a-t-elle raison ? Justifier.

$$(x + 5)(2x - 1) = 2x^2 - x + 10x - 5 = 2x^2 + 9x - 5$$

Léa a raison.

## 45 Multiple de 3 ?

Modéliser, Raisonner, Calculer

Voici un programme de calcul.

► Choisir un nombre entier.  
 ► Ajouter 3.  
 ► Multiplier le résultat obtenu par 7.  
 ► Soustraire 4 fois le nombre de départ.

► Margot prétend que le résultat obtenu est toujours un multiple de 3. A-t-elle raison ?

Si  $x$  est le nombre entier choisi au départ,

le programme donne  $(x + 3) \times 7 - 4x$ .

$$\text{Or } (x + 3) \times 7 - 4x = 7x + 21 - 4x = 3x + 21$$

$$3x + 21 = 3(x + 7), \text{ où } x + 7 \text{ est un entier.}$$

On obtient donc bien un multiple de 3.

Margot a donc raison.

## 46 Tour de magie

Raisonner, Calculer

Fairouz annonce à ses amis qu'elle va leur faire un tour de magie. Elle leur demande de :

- choisir un nombre entier positif ;
- ajouter 1 ;
- multiplier le résultat par la différence entre le nombre de départ et 1 ;
- ajouter 1 au résultat ;
- annoncer le résultat final.

À chaque annonce d'un résultat final, Fairouz arrive à deviner le nombre choisi au départ !

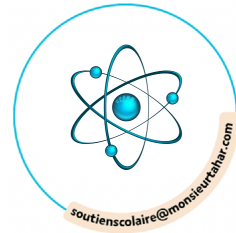
► Comment fait-elle ?

Si  $x$  est le nombre de départ, le programme donne

$$(x + 1) \times (x - 1) + 1.$$

$$\text{Or } (x + 1) \times (x - 1) + 1 = x^2 - x + x - 1 + 1 = x^2$$

Fairouz n'a donc qu'à annoncer la racine carrée du résultat final.



## 47 D'après Brevet 2019

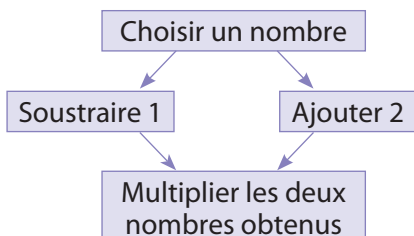
Représenter, Calculer

Voici deux programmes de calcul.

### Programme 1

Choisir un nombre.  
Le multiplier par 3.  
Ajouter 1.

### Programme 2



1. Vérifier que, si on choisit 5 comme nombre de départ, le résultat du programme 1 vaut 16 et le résultat du programme 2 vaut 28.

$$5 \times 3 + 1 = 15 + 1 = 16$$

$$(5 - 1) \times (5 + 2) = 4 \times 7 = 28$$

2. Soit  $x$  le nombre choisi au départ.

Exprimer le résultat du programme 1 en fonction du nombre  $x$  choisi au départ.

$$A = 3x + 1$$

3. Le résultat du programme 2 en fonction de  $x$  choisi au départ est  $B = (x - 1)(x + 2)$ .

Développer et réduire  $B$ .

$$B = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$$

4. Montrer que  $B - A = (x + 1)(x - 3)$ .

$$B - A = x^2 + x - 2 - (3x + 1)$$

$$B - A = x^2 + x - 2 - 3x - 1$$

$$B - A = x^2 - 2x - 3$$

$$(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3$$

$$(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$$

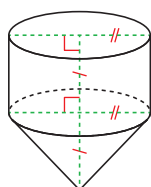
$$\text{Donc } B - A = (x + 1)(x - 3)$$

## 48 Un volume

Chercher, Représenter, Raisonner

Un silo à grains à la forme d'un cône surmonté d'un cylindre ayant le même diamètre et la même hauteur.

La contenance de la partie cylindrique est de  $354 \text{ m}^3$ .



► Montrer que la contenance totale du silo à grains est alors de  $472 \text{ m}^3$ .

Si on note  $r$  le rayon et  $h$  la hauteur du cylindre

comme du cône, on a :

$$V_{\text{cylindre}} = \pi r^2 \times h \text{ et } V_{\text{cône}} = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

$$\text{Donc } V_{\text{cône}} = \frac{V_{\text{cylindre}}}{3} = \frac{354 \text{ m}^3}{3} = 118 \text{ m}^3$$

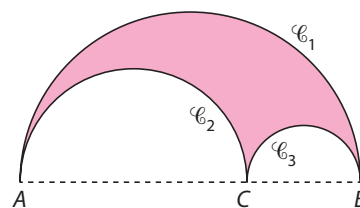
$$118 \text{ m}^3 + 354 \text{ m}^3 = 472 \text{ m}^3$$

Le volume du silo à grains est de  $472 \text{ m}^3$ .

## 49 L'arbelos

Chercher, Calculer

Soient  $\mathcal{C}_1$  un demi-cercle de diamètre  $[AB]$  et  $C$  un point de ce diamètre. À l'intérieur du demi-disque on trace les demi-cercles  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  de diamètres respectifs  $[AC]$  et  $[CB]$ .



L'arbelos est la figure coloriée obtenue.

Le demi-cercle  $\mathcal{C}_1$  est appelé l'arc supérieur de l'arbelos.

Les demi-cercles  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  sont appelés les arcs inférieurs de l'arbelos.

On donne  $AB = 10$  et on note  $x$  la longueur  $AC$ .

1. Calculer la longueur de l'arc supérieur  $\mathcal{C}_1$ .  
Donner la valeur exacte en fonction de  $\pi$ .

Ce demi-cercle a pour diamètre 10.

$$\text{Sa longueur est donc } \frac{10\pi}{2} = 5\pi.$$

2. Montrer que la longueur de l'arc supérieur d'un arbelos est égale à la somme des longueurs des arcs inférieurs.

Le demi-cercle de diamètre  $AC = x$  a pour longueur  $\frac{x\pi}{2}$ .

$$CB = 10 - x$$

Le demi-cercle de diamètre  $CB$  a pour longueur  $\frac{(10 - x)\pi}{2}$ .

La somme de ces deux longueurs est :

$$\frac{x\pi}{2} + \frac{(10 - x)\pi}{2} = \frac{(x + 10 - x)\pi}{2} = \frac{10\pi}{2} = 5\pi.$$

La longueur de l'arc supérieur est bien égale

à la somme des longueurs des deux arcs inférieurs.

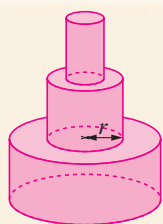
## Tâche complexe

50

Un pâtissier confectionne des gâteaux géants pour de grandes occasions. Pour cela il a deux modèles de gâteaux : le gâteau à trois étages et le gâteau conique.

Il souhaite que ces deux modèles de gâteau aient le même volume.

### Doc 1 Formes des deux gâteaux



On note  $r$  le rayon en centimètres du cylindre moyen.

On note  $R$  le rayon en centimètres du cône.

### Doc 2 Gâteau à trois étages

Ce gâteau a la forme de trois cylindres de hauteur 10 cm empilés les uns sur les autres. Le rayon du grand cylindre est égal au double du rayon du cylindre moyen, lui-même égal au double du rayon du petit cylindre.

### Doc 3 Gâteau conique

Ce gâteau a la forme d'un cône de hauteur 17,5 cm.

► Montrer que, si le rayon du cône est égal au triple du rayon du cylindre moyen, alors ces deux gâteaux ont effectivement le même volume.

Les rayons des trois cylindres sont, du plus petit au plus grand,  $0,5r$  ;  $r$  et  $2r$ .

L'expression du volume du gâteau à trois étages en fonction de  $r$  est :

$$\pi(2r)^2 \times 10 + \pi r^2 \times 10 + \pi(0,5r)^2 \times 10 = 40\pi r^2 + 10\pi r^2 + 2,5\pi r^2 = 52,5\pi r^2.$$

Le rayon du cône peut s'écrire  $3r$ .

Expression du volume du gâteau conique en fonction de  $r$  :  $\frac{\pi(3r)^2 \times 17,5}{3} = \frac{\pi \times 9r^2 \times 17,5}{3} = 52,5\pi r^2.$

Quelle que soit la valeur du rayon  $r$ , ces deux expressions sont égales, donc les volumes des deux gâteaux sont égaux.



## Le jeu

### Lecture d'un programme

On n'utilise que des nombres entiers. Par deux, chaque élève choisit, sans le dire à l'autre, un objectif parmi O1, O2 et O3 et écrit un programme avec trois ou quatre étapes qui atteint cet objectif. Ensuite les deux élèves échangent leurs programmes et chacun doit alors retrouver l'objectif choisi par l'autre et lui prouver que sa réponse est correcte.

**Objectif O1**  
Obtenir un multiple de 3.

**Objectif O2**  
Obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 0.

**Objectif O3**  
Obtenir un nombre pair.

## Le défi

### Nombres consécutifs

« Si je choisis trois nombres entiers consécutifs, le carré du second est égal à la somme de 1 et du produit du premier par le dernier ».

Avec 2, 3 et 4 :

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|

Total : 9

Avec 5, 6 et 7 :

|   |   |   |
|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|

Total : 36

L'affirmation est-elle vraie ? Justifier.

L'affirmation est vraie.