

1

Connaitre la division euclidienne

► Effectuer la **division euclidienne** de a par b , c'est déterminer le quotient q et le reste r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b.$$



- 1 Compléter avec des nombres et les mots :
diviseur • dividende • quotient • reste

a. $201 : 9 = Q=22 ; R=3$

201 est le _____ ,

9 est le _____ ,

22 est le _____ ,

3 est le _____ et on a

$$201 = 9 \times \text{_____} + \text{_____} \text{ (avec } \text{_____} < 9 \text{)}.$$

b. $394 = 15 \times 25 + 19$.

394 est le _____ , _____ est le diviseur,

_____ est le quotient et _____ est le reste

(on a bien _____ < _____).

- 2 Compléter.

Dans la division euclidienne de 3 512 par 11,

le quotient est _____ et le reste est _____. On a

$$3\,512 = \text{_____} \times \text{_____} + \text{_____} \text{ avec } \text{_____} < \text{_____}.$$

- 3 Quels sont les restes possibles d'une division euclidienne par 7 ?

- 4 **MODE EXPERT** Le quotient d'une division euclidienne est 15, le reste est 2 et le dividende est 182. Quel est le diviseur ?

► Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0, on a : $a = b \times q$.

On dit que a est **un multiple de b** , b est **un diviseur de a** ou encore a est **divisible par b** .

- 5 Compléter avec des nombres et les mots :
multiple de • diviseur de • divisible par

a. $700 : 25 = Q=28 ; R=0$

700 est un _____ de 25, _____ est un diviseur de 700.

b. $2\,394 = 126 \times 19$

2 394 est _____ 126 et 19.

126 est un _____ de 2 394.

c. 1 est un _____ tous les entiers.

- 6 Vrai ou faux ?

a. 152 est divisible par 10 : _____

b. 152 est un multiple de 4 : _____

c. 152 est un diviseur de 304 : _____

d. 152 est divisible par 152 : _____

e. 152 est divisible par 0 : _____

- 7 Le nombre 413 est-il divisible par 19 ?

8 **MODE EXPERT** Sarah affirme : « Si un nombre entier est divisible par 3 et par 6, il est aussi forcément divisible par 18 (3×6). »

Sarah a-t-elle raison ?

► Un nombre entier est **divisible** par :

- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- 10 si son chiffre des unités est 0.

9 Compléter le tableau par Oui ou Non.

Est divisible par	2	3	5	9	10
1 521					
3 450					
9 972					

10 Déterminer tous les nombres entiers compris entre 200 et 250, divisibles à la fois par 3 et par 5 mais pas par 9.

11 Simplifier autant que possible l'écriture des fractions en utilisant les critères de divisibilité.

a. $\frac{51}{75} =$ _____

b. $\frac{315}{135} =$ _____

12 **MODE EXPERT** Soit $N = 7345?$ un nombre entier à cinq chiffres dont deux sont inconnus. Quelles sont toutes les valeurs possibles de N sachant qu'il est divisible par 9 et par 5 ?

► Pour déterminer si un nombre b est **diviseur d'un nombre a** , on cherche si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

13 17 et 19 sont-ils des diviseurs de 408 ?

La méthode de la division permet d'obtenir 2 diviseurs à chaque test positif.



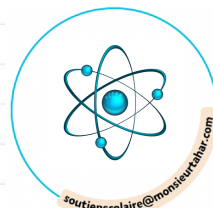
14 Une calculatrice affiche 224 ÷ 7 Q=32 R=0

En déduire deux diviseurs de 224.

15 Chacun de ces nombres est-il divisible par 23 ? Si oui, en déduire un deuxième diviseur.

a. 1 219 :

b. 1 040 :



► Pour **déterminer tous les diviseurs** d'un entier naturel N , on teste la divisibilité de N par 2, 3, 4 etc. jusqu'au plus grand nombre entier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

16 On veut déterminer tous les diviseurs de 70.

1. $\sqrt{70} \approx$ _____ ; on teste donc tous les diviseurs de 70 jusqu'à _____

2. Les diviseurs de 70 sont : _____

17 On veut déterminer tous les diviseurs de 201.

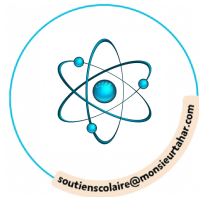
1. $\sqrt{201} \approx$ _____ ; on teste donc tous les diviseurs de 201 jusqu'à _____

2. Les diviseurs de 201 sont : _____

18 **MODE EXPERT** Deux entiers naturels sont divisibles par 13 ; leur produit vaut 4 732. Quels sont ces deux nombres ? Donner toutes les possibilités.

**3**

Reconnaitre un nombre premier



► Un **nombre premier** est un entier qui admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

► Pour prouver qu'un nombre **n'est pas premier**, il suffit donc de trouver un diviseur autre que 1 et lui-même.

19 Vrai ou faux ? Justifier.

a. 1 est un nombre premier.

b. Il existe six nombres premiers inférieurs à 20.

c. Tous les nombres premiers sont impairs.

d. Le produit de deux nombres premiers est toujours un nombre premier.

20 Entourer les nombres premiers :

7 12 20 23 25 29

21 Justifier que 135 n'est pas un nombre premier.

22 Justifier que 1 689 n'est pas un nombre premier.

23 Un seul de ces nombres est premier, lequel ? Justifier.

80 123 643 3 575 9 099

24 Je suis un nombre premier compris entre 70 et 80, tel que le nombre obtenu en permutant mes deux chiffres est encore premier. Qui suis-je ? Donner toutes les réponses possibles.

25 Quel est le plus petit nombre premier à trois chiffres ?

► Pour prouver qu'un nombre est premier, il suffit de **tester sa divisibilité** par 2, 3, 4 etc. jusqu'au plus grand entier inférieur ou égal à sa racine carrée.

26 Prouver que 113 est un nombre premier.

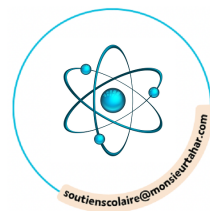
$\sqrt{113} \approx$; on teste donc tous les diviseurs de 113 jusqu'à

27 Prouver que 251 est un nombre premier.

$\sqrt{251} \approx$; on teste donc tous les diviseurs de 113 jusqu'à

28 **MODE EXPERT** Lila dispose de 163 jetons qu'elle veut disposer pour former un rectangle d'au moins deux lignes et deux colonnes. Prouver que c'est impossible.





► Pour démontrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un **contre-exemple**.

37 Tom affirme : « La somme de deux nombres premiers est toujours un nombre premier ». Démontrer que Tom a tort.

38 Chaima dit : « Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 6, alors ce nombre est divisible par 6 ». Démontrer que Chaima a tort.

39 **MODE EXPERT** Démontrer que si n est un nombre entier naturel, $n^2 - n + 11$ n'est pas toujours un nombre premier.

► Tout **multiple** de 5 peut s'écrire sous la forme $5n$ (où n est un entier naturel).
De même, un nombre **divisible** par 7 peut s'écrire $7n$; un nombre **pair**, $2n$; etc.

40 Démontrer que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.

41 1. n désigne un nombre entier. Comment peut-on écrire l'entier qui le précède et l'entier qui le suit ?

2. Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

42 **MODE EXPERT** Démontrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Un nombre impair s'écrit $2m + 1$, avec m entier naturel.



43 **MODE EXPERT** Soit N un entier naturel à trois chiffres, avec u comme chiffre des unités, d des dizaines et c des centaines.

1. Compléter : $N = \dots c + \dots d + u$

2. Démontrer que si le nombre formé par les deux derniers chiffres de N est divisible par 4, alors N est aussi divisible par 4.

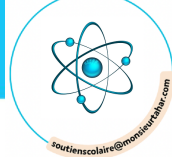
► Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les nombres entiers, on peut prouver qu'elle est vraie pour les nombres pairs puis pour les nombres impairs (c'est un raisonnement par **disjonction de cas**).

44 **MODE EXPERT** On veut démontrer que, quel que soit a un entier naturel, $(a + 1)(a + 4)$ est pair.

1. Démontrer l'affirmation dans le cas où a est pair.

2. Démontrer l'affirmation dans le cas où a est impair.

3. Conclure.



45 Parcours ceinture jaune

- Déterminer les multiples de 8 inférieurs à 20.
.....
- Déterminer tous les diviseurs de 8.
.....
- Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de 60 par 8 ?
.....
- 1 639 est-il divisible par 9 ?
.....
- Lequel de ces deux nombres n'est pas premier :
2 895 ; 2 897 ?
.....
- Décomposer 35 en produit de facteurs premiers.
.....
- Quelle expression littérale représente un multiple de 3 ?
.....

46 Parcours ceinture verte

- Déterminer les multiples de 32 compris entre 60 et 130.
.....
- Quels sont tous les diviseurs de 20 ?
.....
- Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de 150 par 12 ?
.....
- 6 975 est-il divisible par 5 et par 9 ?
.....
- Tous les nombres premiers sont-ils impairs ?
.....
- Décomposer 58 en produit de facteurs premiers.
.....
- Décomposer 70 en produit de facteurs premiers.
.....
- Quelle expression littérale représente un nombre impair ?
.....

47 Parcours ceinture noire

- Quel est le plus petit multiple commun de 6 et de 9 ?
.....
- Quel est, sans poser la division, le reste de la division euclidienne de 1 814 par 18 ?
.....
- Quels sont tous les diviseurs de 56 ?
.....
- Dans la liste suivante, un seul nombre est premier, lequel ? 52 ; 76 ; 17 ; 21 ; 35
.....
- On donne $588 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
En déduire le plus grand diviseur commun de ces deux nombres.
.....
- On donne $588 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
En déduire le plus petit multiple commun de ces deux nombres.
.....
- Quelle expression littérale représente la somme d'un multiple de 7 et d'un multiple de 8 ?
.....

Problèmes

ceinture
jaune

ceinture
verte

ceinture
noire



soutienscolaire@monsieurkahar.com

48 Œufs en boîte

Calculer

Cette semaine, les poules de Lou ont pondu 287 œufs.

1. Combien de boîtes de 12 œufs faut-il au minimum pour ranger ces œufs ?

2. Combien d'œufs manque-t-il pour remplir toutes les boîtes ?

49 En colonie

Modéliser, Calculer

Un groupe est composé de 110 adolescents. Combien d'équipes de même effectif (compris entre 6 et 20 adolescents) peut-on réaliser ? Combien d'adolescents y aura-t-il dans chaque équipe ? Donner toutes les possibilités.

50 Métallurgie

Calculer, Raisonner

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 280 et 315.

2. Une plaque métallique rectangulaire de dimensions 280 cm et 315 cm doit être coupée en carrés identiques, sans perte. Quelle est la dimension des plus grands carrés possibles ?

51 Littéralement

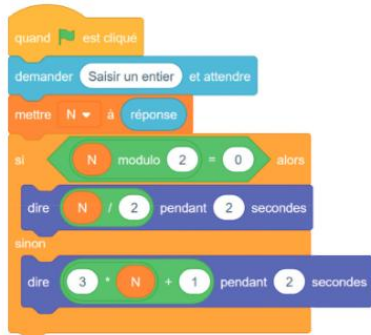
Modéliser, Représenter

Écrire des expressions littérales qui désignent :

- un multiple de 13 ;
- la somme d'un entier et de son suivant ;
- le carré d'un multiple de 5 ;
- la somme d'un multiple de 3 et d'un multiple de 4.

52 Vers Syracuse

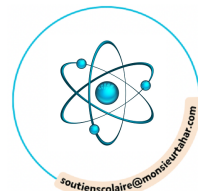
Modéliser, Calculer



La commande `N modulo 2 = 0` donne le reste de la division euclidienne du premier nombre par le second.



- Que signifie `N modulo 2 = 0` pour le nombre N ?
- Que dit le lutin si on saisit 15 au départ ?
- On saisit 5 au départ. On saisit ensuite le nombre dit par le lutin, et ainsi de suite. Quels sont les dix premiers nombres qui seront dits par le lutin ?



53 Avec deux entiers

Calculer, Représenter

Les décompositions en produits de facteurs premiers de 175 et 245 sont $5^2 \times 7$ et 5×7^2 .

1. Quel est le plus grand diviseur commun de ces deux nombres ?

2. Simplifier autant que possible $\frac{175}{245}$.

54 Rue des Lilas

Chercher, Communiquer



Maxime habite rue des Lilas, le numéro de sa maison est un multiple de 5 et les deux maisons précédentes portent des numéros qui sont des nombres premiers inférieurs à 100.

► À quel numéro habite Maxime ?

55 Nombre mystère

Chercher, Calculer

Je suis un nombre entier. Le quotient de ma division euclidienne par 11 ou par 12 est le même, mais pour 11, le reste est 5, et pour 12, le reste est 2.

► Qui suis-je ? Justifier.

56 Vrai ou faux ?

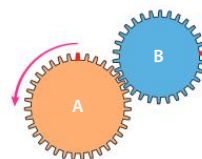
Chercher, Calculer

Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

57 Engrenages

Modéliser, Calculer

► Au bout de combien de tours chacune des roues A (30 dents) et B (35 dents) reviennent-elles dans leur position initiale ?



58 À Pâques

Calculer, Raisonner

1. Décomposer 4 655 et 1 425 en produits de facteurs premiers.

2. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $4\,655 \times 1\,425$.

3. Quel nombre maximum de sachets identiques peut-on réaliser avec 4 655 œufs de Pâques et 1 425 coqs en chocolat ? Quel est alors le prix d'un sachet sachant qu'un œuf coûte 0,12 € et un coq 0,30 € ?

Problèmes

59 Sonneries

Chercher, Calculer

L'horloge de Rémi sonne toutes les 12 heures, et son alarme toutes les 15 heures. Le 21 septembre à 21 h, elles sonnent simultanément.

► Quand sonneront-elles ensemble la prochaine fois ?

60 Multiple ?

Calculer, Communiquer

Soit $a = 3^4 \times 7$.

Mika dit : « Le nombre $b = 2 \times 3^5 \times 7^2$ est un multiple de a ».

► Mika a-t-il raison ? Justifier sans utiliser la calculatrice.

61 Max a dit

Représenter, Calculer

Maxime affirme : « Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 4, je multiplie le résultat par 5. Je soustrais le nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 4. »

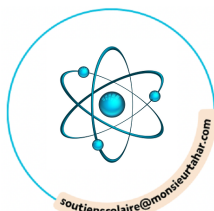
► Maxime a-t-il raison ? Justifier.

62 Avec des fractions

Calculer

Simplifier autant que possible les fractions suivantes en décomposant d'abord le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.

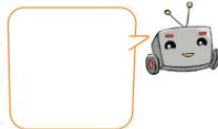
$$\begin{aligned} & \cdot \frac{180}{126} = \\ & \cdot \frac{585}{1\,275} = \\ & \cdot \frac{1\,925}{4\,125} = \end{aligned}$$



63 Toujours pair !

Raisonner

Démontrer que si a est un nombre entier naturel, alors $a(a+1)$ est un nombre pair.



64 Magique !

Raisonner

1. Appliquer le programme de calcul suivant avec trois nombres de son choix.

Choisir un nombre de deux chiffres
Écrire ce nombre deux fois pour obtenir un nombre de quatre chiffres
Diviser ce nombre par 101

Quelle conjecture peut-on faire ?

2. Démontrer cette conjecture en notant d et u les chiffres des dizaines et des unités du nombre initial.

65

Tâche complexe

Un artiste réalise des structures à partir de cubes (doc 1), à la façon du sculpteur américain Sol LeWitt (1928 - 2007). Pour transporter ses œuvres, cet artiste a trouvé des containers métalliques (doc 2).

Doc 1 Pyramide de Sol LeWitt



Doc 2 Dimension d'un container



Doc 3 Les cubes de béton

Les cubes utilisés sont tous des cubes de béton cellulaire de mêmes dimensions.
Chaque arête de ces cubes mesure un nombre entier de centimètres strictement supérieur à 1.
Les cubes rangés occupent la totalité de l'espace intérieur du container

► Combien de cubes chaque container permet-il de ranger ?



Le jeu

Juniper Green

Règle 1 Chaque joueur, à tour de rôle, coche une case qui n'a pas encore été cochée.

Règle 2 On ne peut cocher une case que si son numéro est un diviseur ou un multiple du numéro de la case cochée au coup précédent.

Règle 3 Un joueur perd la partie lorsqu'il ne peut plus jouer en utilisant les règles précédentes.
Jouer pour développer une stratégie gagnante.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Le défi

La reine des pommes

Mathilde a plus d'une pomme mais moins de 200 pommes. Que l'on remplisse des cagettes en mettant 12 pommes, 14 pommes ou 21 pommes par cagette, il lui en reste toujours une en trop.
Combien Mathilde a-t-elle de pommes ?
